

Algunas aplicaciones de ÓÓ. EE. dispersivos

Carlos Carleos

*Dep.º Estadística e Investigación Operativa
y Didáctica de la Matemática*

U. Oviedo

21 NOV 2024 IN MEMORIAM MIGUEL LÓPEZ-DÍAZ

Índice

Introducción

Aplicación: Urogallos

Aplicación: Mastitis

Aplicación: ELISA

Aplicación: Córnea

Agradecimientos

Introducción — Mi genealogía académica

1993: Pedro Gil



1996: Ángeles Gil



1999: Norberto Corral



2004: Asun Lubiano



2008: Miguel López-Díaz



Introducción — Orden determinista

- ▶ orden: relación reflexiva, antisimétrica, transitiva
- ▶ orden total: $\forall (x,y), x \leq y$ o bien $y \leq x$
- ▶ $x, y \in \mathbb{R} ; x \leq y :$



Introducción — Orden estocástico

- ▶ orden ¿total? entre variables aleatorias
- ▶ $X \underset{\mathbb{E}}{\leq} Y \iff E(X) \leq E(Y)$

Introducción — Orden estocástico

- ▶ orden ¿total? entre variables aleatorias
- ▶ $X \underset{\mathbb{E}}{\leq} Y : \iff E(X) \leq E(Y) \not\Rightarrow \text{mediana}(X) \leq \text{mediana}(Y), \text{ etc.}$

Introducción — Orden estocástico usual

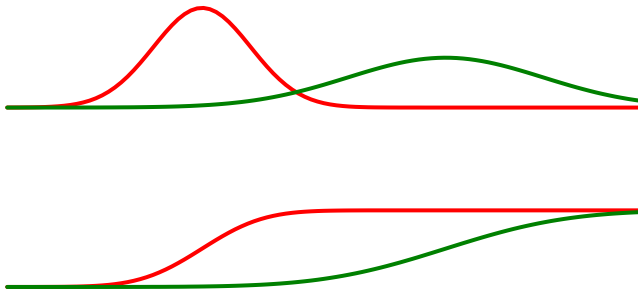
- ▶ dominancia estocástica (Lehmann 1955)
- ▶ $X \underset{\text{st}}{\leq} Y : \iff \forall t, \Pr[X > t] \leq \Pr[Y > t] \iff F_X \geq F_Y$

Introducción — Orden estocástico usual

- ▶ dominancia estocástica: orden parcial
- ▶ $X \underset{\text{st}}{\leq} Y : \iff \forall t, \Pr[X > t] \leq \Pr[Y > t] \iff F_X \geq F_Y$

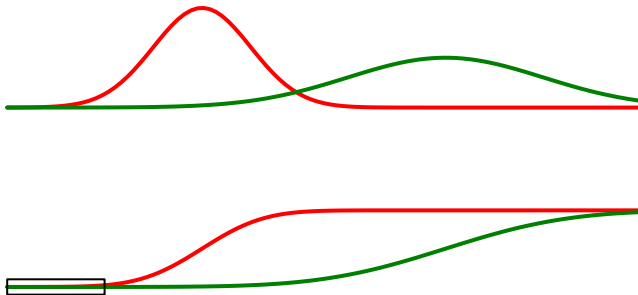
Introducción — Orden estocástico usual

- ▶ $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 2)$, $X \not\leq_{\text{st}} Y$



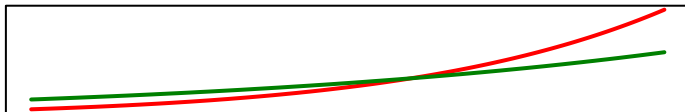
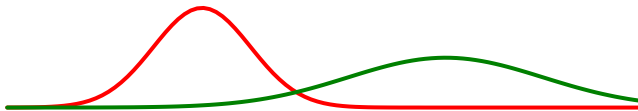
Introducción — Orden estocástico usual

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 2)$, $X \not\leq_{\text{st}} Y$



Introducción — Orden estocástico usual

- $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(5, 2)$, $X \not\leq_{st} Y$



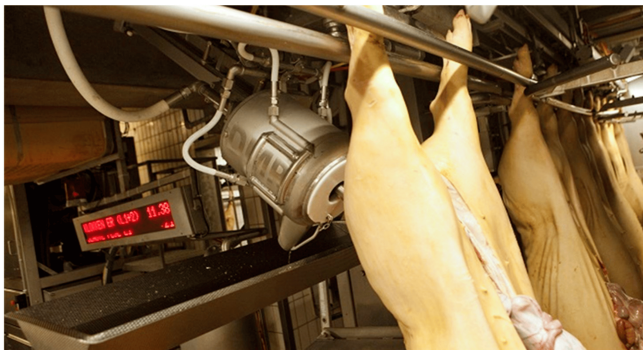
Introducción — Orden estocástico dispersivo

- ▶ a veces, variabilidad más importante que centralización
- ▶ p.ej. en mejora genética
 - ▶ tiempos de maduración



Introducción — Orden estocástico dispersivo

- ▶ a veces, variabilidad más importante que centralización
- ▶ p.ej. en mejora genética
 - ▶ tiempos de maduración
 - ▶ automatización de despiece de canales

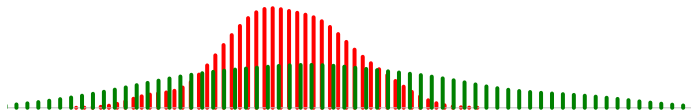


Introducción — Orden dispersivo univariante

- ▶ (Shaked 1982) compara recorridos intercuantílicos

$$\Delta_{\alpha}^{\beta} F^{-1} := F_X^{-1}(\beta) - F_X^{-1}(\alpha)$$

- ▶ $X \underset{\text{disp}}{\leq} Y \iff \forall 0 < \alpha < \beta < 1, \Delta_{\alpha}^{\beta} F_X^{-1} \leq \Delta_{\alpha}^{\beta} F_Y^{-1}$



Introducción — Orden dispersivo (multivariante) débil

- ▶ (Giovagnoli y Wynn 1995) compara distancia entre dos copias independientes de la misma variable
- ▶ $X \underset{D}{\leq} Y : \iff \|X_1 - X_2\| \underset{st}{\leq} \|Y_1 - Y_2\| \iff X \underset{disp}{\leq} Y$

Introducción — Cómo contrastar $H_0: X \underset{\text{st}}{\leq} Y$ $H_1: X \not\underset{\text{st}}{\leq} Y$

- ▶ Kolmogórov-Smirnov (KS) unilateral

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \hat{F}_Y(t) - \hat{F}_X(t)$$

Introducción — Cómo contrastar $H_0: X \underset{st}{\leq} Y$ $H_1: X \not\underset{st}{\leq} Y$

- ▶ Kolmogórov-Smirnov (KS) unilateral

$$\sup_{-\infty < t < \infty} \hat{F}_Y(t) - \hat{F}_X(t)$$

- ▶ Wilcoxon–Mann-Whitney (WMW)

$$\sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Y} \mathbb{1}(X_i > Y_j)$$

consistente si $H_1: X \underset{st}{>} Y \iff Y \underset{st}{\leq} X \cap X \underset{st}{\neq} Y$

Sección 2

Aplicación: Urogallos

Aplicación: Urogallos — Artículo

- ▶ An indexed dispersion criterion for testing the sex-biased dispersal of lek mating behavior of capercaillies
- ▶ *Environmental and Ecological Statistics* 17:283-301
- ▶ C. Carleos y M. López-Díaz
- ▶ 2010

Aplicación: Urogallos — Artículo

- ▶ Criterio indexado de dispersión para contrastar diferencias entre sexos en el emparejamiento de los urogallos en cantaderos
- ▶ *Environmental and Ecological Statistics* 17:283-301
- ▶ C. Carleos y M. López-Díaz
- ▶ 2010

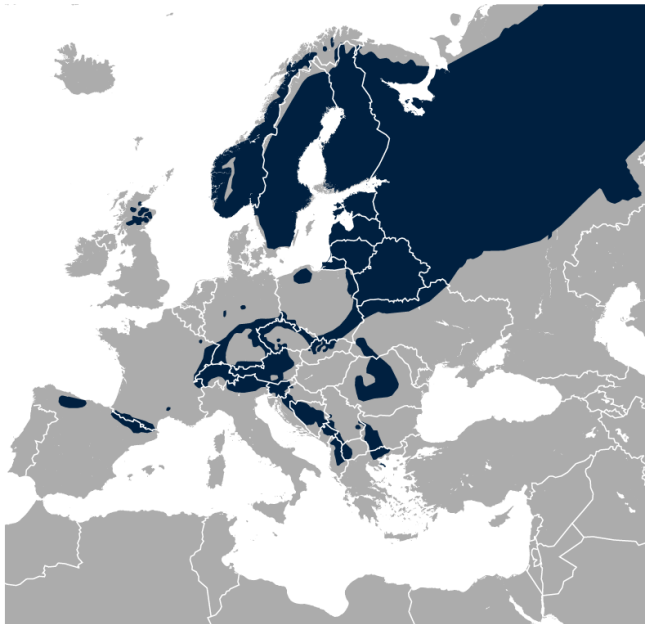
Aplicación: Urogallos — Contexto



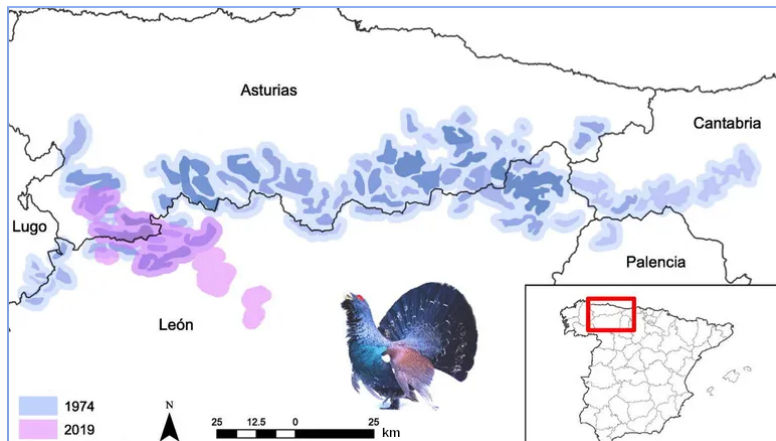
Aplicación: Urogallos — Contexto



Aplicación: Urogallos — Contexto



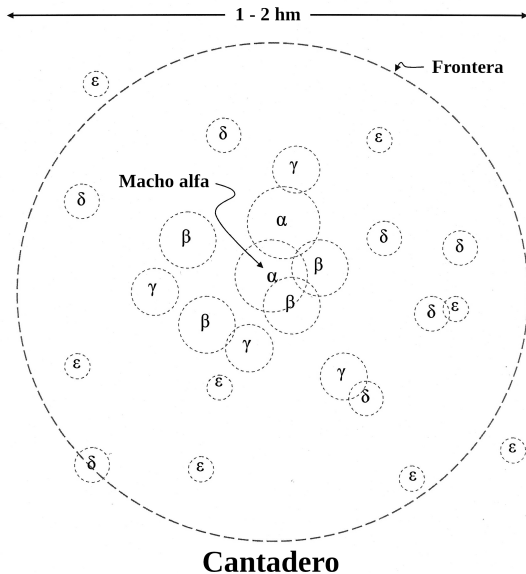
Aplicación: Urogallos — Contexto



Aplicación: Urogallos — Contexto



Aplicación: Urogallos — Contexto



Aplicación: Urogallos — Contexto

- ▶ movimientos de animales influyen en
 - ▶ distribución espacial
 - ▶ estructura genética

Aplicación: Urogallos — Contexto

- ▶ movimientos de animales influyen en
 - ▶ distribución espacial
 - ▶ estructura genética
- ▶ en muchas especies de aves hay diferencias entre sexos
 - ▶ hembras se dispersan para escoger macho
 - ▶ minimización de consanguinidad

Aplicación: Urogallos — Contexto

- ▶ movimientos de animales influyen en
 - ▶ distribución espacial
 - ▶ estructura genética
- ▶ en muchas especies de aves hay diferencias entre sexos
 - ▶ hembras se dispersan para escoger macho
 - ▶ minimización de consanguinidad
- ▶ emparejamiento en cantaderos
 - ▶ territorios donde se congregan machos para cortejo
 - ▶ urogallos: forma circular con diámetro entre 1 hm y 2 hm

Aplicación: Urogallos — Contexto

- ▶ movimientos de animales influyen en
 - ▶ distribución espacial
 - ▶ estructura genética
- ▶ en muchas especies de aves hay diferencias entre sexos
 - ▶ hembras se dispersan para escoger macho
 - ▶ minimización de consanguinidad
- ▶ emparejamiento en cantaderos
 - ▶ territorios donde se congregan machos para cortejo
 - ▶ urogallos: forma circular con diámetro entre 1 hm y 2 hm
- ▶ suposición tradicional
 - ▶ machos pasan mucho tiempo en cantaderos
 - ▶ hembras entran y salen con frecuencia

Aplicación: Urogallos — Contexto

- ▶ movimientos de animales influyen en
 - ▶ distribución espacial
 - ▶ estructura genética
- ▶ en muchas especies de aves hay diferencias entre sexos
 - ▶ hembras se dispersan para escoger macho
 - ▶ minimización de consanguinidad
- ▶ emparejamiento en cantaderos
 - ▶ territorios donde se congregan machos para cortejo
 - ▶ urogallos: forma circular con diámetro entre 1 hm y 2 hm
- ▶ suposición tradicional
 - ▶ machos pasan mucho tiempo en cantaderos
 - ▶ hembras entran y salen con frecuencia
- ▶ Mäki-Petäys y col. 2007
 - ▶ machos y hembras muestran dispersión similar
 - ▶ datos del norte de Finlandia, con abundantes urogallos

Aplicación: Urogallos — Material

- ▶ datos suministrados por Mario Quevedo
(Dep.º Biología de Organismos y Sistemas, U. Oviedo)
- ▶ 145 machos, 126 hembras; 1999-2006
- ▶ coordenadas (X, Y) respecto a los centros de los cantaderos

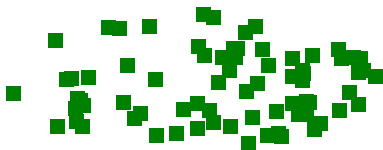
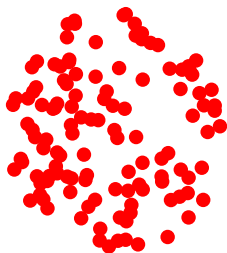
Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ se pretende
 - ▶ ordenar según dispersión del movimiento
 - ▶ que influya sólo el movimiento fuera del cantadero
- ▶ cantadero de radio $r =$ bola $B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq r\}$

Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ distancia de Hausdorff

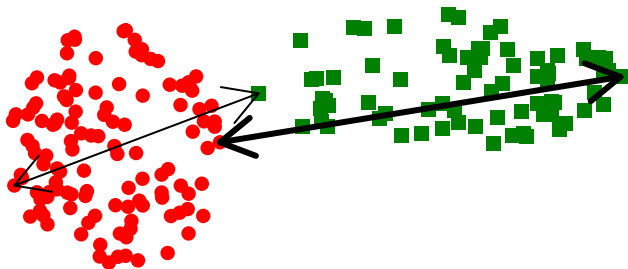
$$d_H(A, C) := \max \left\{ \sup_{\mathbf{a} \in A} \inf_{\mathbf{c} \in C} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|, \sup_{\mathbf{c} \in C} \inf_{\mathbf{a} \in A} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| \right\}$$



Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ distancia de Hausdorff

$$d_H(A, C) := \max \left\{ \sup_{\mathbf{a} \in A} \inf_{\mathbf{c} \in C} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\|, \sup_{\mathbf{c} \in C} \inf_{\mathbf{a} \in A} \|\mathbf{a} - \mathbf{c}\| \right\}$$



Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ distancia de Hausdorff

$$d_H(A, C) = \inf \{ \varepsilon \geq 0 \mid A \subset C + B_\varepsilon(\mathbf{0}), C \subset A + B_\varepsilon(\mathbf{0}) \}$$

Aplicación: Urogallos — Métodos

► $\tilde{X} = B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}$

Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ $\tilde{X} = B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}$
- ▶ $W_{\mathbf{X}}^r := d_H(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$
 $= d_H(B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}, B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_2\})$

Aplicación: Urogallos — Métodos

- ▶ $\tilde{X} = B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}$
- ▶ $W_{\mathbf{X}}^r := d_H(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$
 $= d_H(B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}, B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_2\})$
- ▶ orden dispersivo de bola de radio r

$$\mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \quad :\Leftrightarrow \quad \tilde{X} \underset{D}{\leq} \tilde{Y} \quad \Leftrightarrow \quad W_{\mathbf{X}}^r \underset{\text{st}}{\leq} W_{\mathbf{Y}}^r$$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

$$\blacktriangleright \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \iff$$

$$\min\{\|\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2\|, \max\{0, \|\mathbf{X}_1 - \mathbb{E}\mathbf{X}\| - r, \|\mathbf{X}_2 - \mathbb{E}\mathbf{X}\| - r\}\} \underset{\text{st}}{\leq}$$

$$\underset{\text{st}}{\leq} \min\{\|\mathbf{Y}_1 - \mathbf{Y}_2\|, \max\{0, \|\mathbf{Y}_1 - \mathbb{E}\mathbf{Y}\| - r, \|\mathbf{Y}_2 - \mathbb{E}\mathbf{Y}\| - r\}\}$$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

► $\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} + \mathbf{a} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} + \mathbf{c}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} + \mathbf{a} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} + \mathbf{c}$

▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} - \mathbb{E}\mathbf{Y}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} + \mathbf{a} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} + \mathbf{c}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} - \mathbb{E}\mathbf{Y}$
- ▶ $|\lambda| \leq 1 \implies \lambda \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{X} \quad |\lambda| \geq 1 \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \lambda \mathbf{X}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} + \mathbf{a} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} + \mathbf{c}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} - \mathbb{E}\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} - \mathbb{E}\mathbf{Y}$
- ▶ $|\lambda| \leq 1 \implies \lambda \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{X} \quad |\lambda| \geq 1 \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \lambda \mathbf{X}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B -\mathbf{X}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ $\forall \mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} + \mathbf{a} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} + \mathbf{c}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \iff \mathbf{X} - \mathbb{E}X \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} - \mathbb{E}Y$
- ▶ $|\lambda| \leq 1 \implies \lambda \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{X} \quad |\lambda| \geq 1 \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \lambda \mathbf{X}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B -\mathbf{X}$
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \lambda \mathbf{X} \stackrel{r|\lambda|}{\leq}_B \lambda \mathbf{Y}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ **A, C** matrices ortogonales, $\mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \implies \mathbf{AX} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{CY}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ **A, C** matrices ortogonales, $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{AX} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{CY}$
- ▶ σ, τ permutaciones,
 $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ \mathbf{A}, \mathbf{C} matrices ortogonales, $\mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \implies \mathbf{AX} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{CY}$
- ▶ σ, τ permutaciones,
 $(X_1, \dots, X_d) \underset{B}{\overset{r}{\leq}} (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \underset{B}{\overset{r}{\leq}} (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$
- ▶ $\mathbf{X}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}, \mathbf{X}_m \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y}_m \implies \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ \mathbf{A}, \mathbf{C} matrices ortogonales, $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{A}\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{C}\mathbf{Y}$
- ▶ σ, τ permutaciones,
 $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$
- ▶ $\mathbf{X}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^1} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^1} \mathbf{Y}, \mathbf{X}_m \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}_m \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}$
- ▶ $|W_{\mathbf{X}}^{r_1} - W_{\mathbf{X}}^{r_2}| \leq 2|r_1 - r_2|$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

▶ \mathbf{A}, \mathbf{C} matrices ortogonales, $\mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \implies \mathbf{A}\mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{C}\mathbf{Y}$

▶ σ, τ permutaciones,

$$(X_1, \dots, X_d) \underset{B}{\overset{r}{\leq}} (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \underset{B}{\overset{r}{\leq}} (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$$

▶ $\mathbf{X}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^1} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{L^1} \mathbf{Y}, \mathbf{X}_m \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y}_m \implies \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y}$

▶ $|W_{\mathbf{X}}^{r_1} - W_{\mathbf{X}}^{r_2}| \leq 2|r_1 - r_2|$

▶ $r_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} r, \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r_m}{\leq}} \mathbf{Y} \implies \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y}$

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ \mathbf{A}, \mathbf{C} matrices ortogonales, $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{AX} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{CY}$
- ▶ σ, τ permutaciones,
 $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$
- ▶ $\mathbf{X}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathbf{Y}, \mathbf{X}_m \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}_m \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}$
- ▶ $|W_{\mathbf{X}}^{r_1} - W_{\mathbf{X}}^{r_2}| \leq 2|r_1 - r_2|$
- ▶ $r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} r, \mathbf{X} \stackrel{r_m}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}$
- ▶ $X_1 \stackrel{r}{\leq}_B Y_1, X_2 \stackrel{r}{\leq}_B Y_2 \not\Rightarrow (X_1, X_2) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, Y_2)$
 \therefore producto cartesiano de bolas no es bola

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

- ▶ \mathbf{A}, \mathbf{C} matrices ortogonales, $\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{A}\mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{C}\mathbf{Y}$
- ▶ σ, τ permutaciones,
 $(X_1, \dots, X_d) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, \dots, Y_d) \iff (X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(d)}) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_{\tau(1)}, \dots, Y_{\tau(d)})$
- ▶ $\mathbf{X}_m \xrightarrow{L^1} \mathbf{X}, \mathbf{Y}_m \xrightarrow{L^1} \mathbf{Y}, \mathbf{X}_m \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}_m \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}$
- ▶ $|W_{\mathbf{X}}^{r_1} - W_{\mathbf{X}}^{r_2}| \leq 2|r_1 - r_2|$
- ▶ $r_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} r, \mathbf{X} \stackrel{r_m}{\leq}_B \mathbf{Y} \implies \mathbf{X} \stackrel{r}{\leq}_B \mathbf{Y}$
- ▶ $X_1 \stackrel{r}{\leq}_B Y_1, X_2 \stackrel{r}{\leq}_B Y_2 \not\Rightarrow (X_1, X_2) \stackrel{r}{\leq}_B (Y_1, Y_2)$
 \therefore producto cartesiano de bolas no es bola
- ▶ $\mathbf{X} \stackrel{r_1}{\leq}_B \mathbf{Y} \not\Rightarrow \mathbf{X} \stackrel{r_2}{\leq}_B \mathbf{Y}$
 \therefore la bola $B_r(\mathbb{E}\mathbf{X})$ enmascara la distribución de \mathbf{X} en la bola

Aplicación: Urogallos — Resultados matemáticos

► sea

$$\mathbf{X} \underset{\text{SD}}{\leq} \mathbf{Y} : \iff \exists g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ contracción, } \mathbf{X} \underset{\text{st}}{=} g(\mathbf{Y})$$

el orden dispersivo fuerte;

entonces si $g(\mathbf{Y}) = \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{c}$

$$\mathbf{X} \underset{\text{SD}}{\leq} \mathbf{Y} \implies \mathbf{X} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{Y} \quad \forall r$$

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ variable: posición \mathbb{R}^2 de urogallo respecto a su cantadero
 - ▶ considerar el cantadero como una unidad

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ variable: posición \mathbb{R}^2 de urogallo respecto a su cantadero
 - ▶ considerar el cantadero como una unidad
- ▶ **H** posición de hembras ; **M** posición de machos
 - ▶ H_0 : dispersión de **H** = dispersión de **M**
 - ▶ H_1 : dispersión de **H** > dispersión de **M**
 - ▶ consideraremos los conjuntos aleatorios
 - ▶ $\{\mathbf{H}\} \cup B_r(\mathbf{0})$
 - ▶ $\{\mathbf{M}\} \cup B_r(\mathbf{0})$

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ variable: posición \mathbb{R}^2 de urogallo respecto a su cantadero
 - ▶ considerar el cantadero como una unidad
- ▶ **H** posición de hembras ; **M** posición de machos
 - ▶ H_0 : dispersión de **H** = dispersión de **M**
 - ▶ H_1 : dispersión de **H** > dispersión de **M**
 - ▶ consideraremos los conjuntos aleatorios
 - ▶ $\{\mathbf{H}\} \cup B_r(\mathbf{0})$
 - ▶ $\{\mathbf{M}\} \cup B_r(\mathbf{0})$
- ▶ r radio (hm) del cantadero, $0.5 < r < 1$ considerado fijo

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ variable: posición \mathbb{R}^2 de urogallo respecto a su cantadero
 - ▶ considerar el cantadero como una unidad
- ▶ **H** posición de hembras ; **M** posición de machos
 - ▶ H_0 : dispersión de **H** = dispersión de **M**
 - ▶ H_1 : dispersión de **H** > dispersión de **M**
 - ▶ consideraremos los conjuntos aleatorios
 - ▶ $\{\mathbf{H}\} \cup B_r(\mathbf{0})$
 - ▶ $\{\mathbf{M}\} \cup B_r(\mathbf{0})$
- ▶ r radio (hm) del cantadero, $0'5 < r < 1$ considerado fijo
- ▶ t -test

		<i>P</i> -valor	
H_0	H_1	abscisa	ordenada
$\mathbb{E}\mathbf{H} = \mathbf{0}$	$\mathbb{E}\mathbf{H} \neq \mathbf{0}$	0'16	0'40
$\mathbb{E}\mathbf{M} = \mathbf{0}$	$\mathbb{E}\mathbf{M} \neq \mathbf{0}$	0'63	0'14

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ dispersión similar = $\mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M}$ y $\mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H}$ simultáneamente

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ dispersión similar = $\mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M}$ y $\mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H}$ simultáneamente
- ▶ procedimiento
 - ▶ $H_0 : \mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H} \quad H_1 : \mathbf{M} \not\underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H} \quad \xrightarrow{\text{WMW}} \quad H_0 \quad \forall r$
 - ▶ $H_0 : \mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M} \quad H_1 : \mathbf{H} \not\underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M} \quad \xrightarrow{\text{WMW}} \quad H_0 \quad \forall r$
 - ▶ $\therefore \mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M}$ como Mäki-Petäys y col. 2007

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ dispersión similar = $\mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M}$ y $\mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H}$ simultáneamente
- ▶ procedimiento
 - ▶ $H_0 : \mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{H} \quad H_1 : \mathbf{M} \underset{B}{\overset{r}{\not\leq}} \mathbf{H} \quad \xrightarrow{\text{WMW}} \quad H_0 \forall r$
 - ▶ $H_0 : \mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M} \quad H_1 : \mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\not\leq}} \mathbf{M} \quad \xrightarrow{\text{WMW}} \quad H_0 \forall r$
 - ▶ $\therefore \mathbf{H} \underset{B}{\overset{r}{\leq}} \mathbf{M}$ como Mäki-Petäys y col. 2007
- ▶ MWM requiere variables continuas, por lo que se definen

$$Z_{\mathbf{X}}^r := \begin{cases} W_{\mathbf{X}}^r & \text{si } W_{\mathbf{X}}^r > 0 \\ U & \text{si } W_{\mathbf{X}}^r = 0 \end{cases}$$

con $U \hookrightarrow \mathcal{U}(0, 1)$ y se demuestra que

- ▶ $Z_{\mathbf{X}}^r \underset{\text{st}}{\leq} Z_{\mathbf{Y}}^r \implies W_{\mathbf{X}}^r \underset{\text{st}}{\leq} W_{\mathbf{Y}}^r$
- ▶ $Z_{\mathbf{X}}^r \underset{\text{st}}{\not\leq} Z_{\mathbf{Y}}^r \implies W_{\mathbf{X}}^r \underset{\text{st}}{\not\leq} W_{\mathbf{Y}}^r$

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ $W_{\mathbf{X}}^r := d_H(B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}, B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_2\})$
- ▶ cada muestra $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de \mathbf{M} y \mathbf{H}
se baraja $(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n) := (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)})$ con σ permutación
y se divide en
 - ▶ $(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{n/2})$ para \mathbf{X}_1
 - ▶ $(\mathbf{x}'_{n/2+1}, \dots, \mathbf{x}'_n)$ para \mathbf{X}_2

Aplicación: Urogallos — Resultados de la aplicación

- ▶ $W_{\mathbf{X}}^r := d_H(B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_1\}, B_r(\mathbb{E}\mathbf{X}) \cup \{\mathbf{X}_2\})$
- ▶ cada muestra $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ de \mathbf{M} y \mathbf{H}
se baraja $(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_n) := (\mathbf{x}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{x}_{\sigma(n)})$ con σ permutación
y se divide en
 - ▶ $(\mathbf{x}'_1, \dots, \mathbf{x}'_{n/2})$ para \mathbf{X}_1
 - ▶ $(\mathbf{x}'_{n/2+1}, \dots, \mathbf{x}'_n)$ para \mathbf{X}_2
- ▶ se mantuvo H_0 para todo $r \in [0.5, 1]$



Miguel López: "Las matemáticas explican fenómenos como la difusión del urogallo"

El estadístico realiza comparaciones de probabilidades para su aplicación en ámbitos como la ecología o las finanzas

Oviedo, Eloy MÉNDEZ

Miguel López no se ha convertido en un investigador de primer nivel por una cuestión de azar. Este joven catedrático de Estadística es un referente de su especialidad gracias a trabajos relacionados con la Teoría de Órdenes Estocásticos, que trata de comparar distribuciones de probabilidad respecto a algún criterio y que está estrechamente relacionada con el estudio de cuestio-

El currículum

► **Miguel López Díaz.** Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Zaragoza y doctor por la de Oviedo, este leonés es catedrático de Estadística e Investigación Operativa (perteneciente al Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Didáctica de la Matemática) desde hace cinco años, tras años



Sección 3

Aplicación: Mastitis

Aplicación: Mastitis — Artículo

- ▶ A stochastic order of shape variability with an application to cell nuclei involved in mastitis
- ▶ *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 38:95-107
- ▶ C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2010

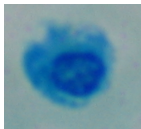
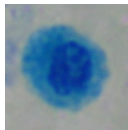
Aplicación: Mastitis — Artículo

- ▶ Orden estocástico de variabilidad de formas con aplicación a núcleos celulares involucrados en mastitis
- ▶ *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 38:95-107
- ▶ C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2010

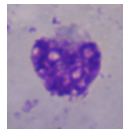
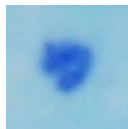
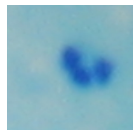
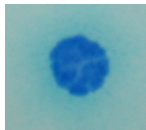
Aplicación: Mastitis — Resumen

- ▶ inflamación de la ubre ; obstrucción de conductos lácteos
- ▶ células somáticas en la leche

células epiteliales



leucocitos



Aplicación: Mastitis — Resumen

- ▶ variabilidad de formas de curvas bidimensionales cerradas
- ▶ contraste de hipótesis sobre variabilidad de forma
- ▶ aplicación a imágenes de núcleos celulares en leche
- ▶ comparación entre vacas sanas y vacas con mastitis

Aplicación: Mastitis — Preliminares

- ▶ forma: información geométrica restante una vez se prescinde de localización, escala y rotación
- ▶ a menudo en medicina, formas regulares (con poca variabilidad) indican salud
 - ▶ endotelio de la córnea
 - ▶ neuronas cerebrales
 - ▶ ...
- ▶ imagen $\xrightarrow{\text{frontera}}$ curva $\xrightarrow{\text{parametrización}}$ curvatura
- ▶ la curvatura determina la variación de una curva plana

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización

Aplicación: Mastitis — Preliminares

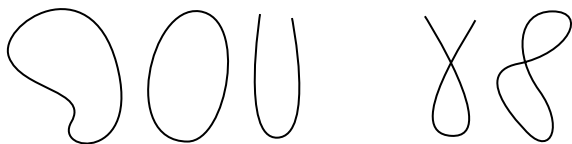
Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización
- ▶ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son parametrizaciones equivalentes si $\exists f$ biyectiva, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ f$

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización
- ▶ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son parametrizaciones equivalentes si $\exists f$ biyectiva, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ f$
- ▶ una curva es simple si $\forall a < c_1 < c_2 < b$, $\mathbf{r}(c_1) \neq \mathbf{r}(c_2)$



curvas simples

curvas no simples

Aplicación: Mastitis — Preliminares

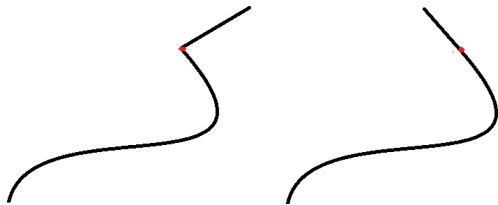
Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización
- ▶ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son parametrizaciones equivalentes si $\exists f$ biyectiva, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ f$
- ▶ una curva es simple si $\forall a < c_1 < c_2 < b$, $\mathbf{r}(c_1) \neq \mathbf{r}(c_2)$
- ▶ una curva es cerrada si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización
- ▶ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son parametrizaciones equivalentes si $\exists f$ biyectiva, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ f$
- ▶ una curva es simple si $\forall a < c_1 < c_2 < b$, $\mathbf{r}(c_1) \neq \mathbf{r}(c_2)$
- ▶ una curva es cerrada si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$
- ▶ una parametrización $\mathbf{r} = (x, y)$ es regular si es derivable y $\|\dot{\mathbf{r}}(c)\| \neq 0$, $\forall c \in (a, b)$



Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ curva $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalo
- ▶ \mathbf{r} es parametrización
- ▶ \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 son parametrizaciones equivalentes si $\exists f$ biyectiva, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 \circ f$
- ▶ una curva es simple si $\forall a < c_1 < c_2 < b$, $\mathbf{r}(c_1) \neq \mathbf{r}(c_2)$
- ▶ una curva es cerrada si $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$
- ▶ una parametrización $\mathbf{r} = (x, y)$ es regular si es derivable y $\|\dot{\mathbf{r}}(c)\| \neq 0$, $\forall c \in (a, b)$
- ▶ C^p clase de curvas con parametrización p veces diferenciable y p -ésima derivada continua

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$
- ▶ toda parametrización p.l.d.a. es regular

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$
- ▶ toda parametrización p.l.d.a. es regular
- ▶ toda curva C^1 admite parametrización p.l.d.a.

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$
- ▶ toda parametrización p.l.d.a. es regular
- ▶ toda curva C^1 admite parametrización p.l.d.a.
- ▶ dada $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular, sea

$$g(c) = \int_a^c \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$$

entonces $\mathbf{r} \circ g^{-1}$ es parametrización p.l.d.a.

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$
- ▶ toda parametrización p.l.d.a. es regular
- ▶ toda curva C^1 admite parametrización p.l.d.a.
- ▶ dada $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular, sea

$$g(c) = \int_a^c \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$$

entonces $\mathbf{r} \circ g^{-1}$ es parametrización p.l.d.a.

- ▶ $\mathbf{r}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es parametrización p.l.d.a.
 $\implies L$ es la longitud de la curva

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvas

- ▶ la parametrización \mathbf{r} es por longitud de arco si $\forall c, \|\dot{\mathbf{r}}(c)\| = 1$
- ▶ toda parametrización p.l.d.a. es regular
- ▶ toda curva C^1 admite parametrización p.l.d.a.
- ▶ dada $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular, sea

$$g(c) = \int_a^c \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt$$

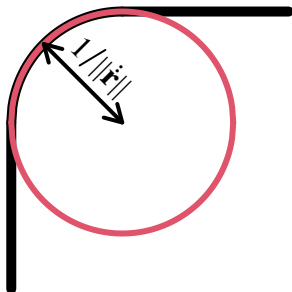
entonces $\mathbf{r} \circ g^{-1}$ es parametrización p.l.d.a.

- ▶ $\mathbf{r}: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ es parametrización p.l.d.a.
 $\implies L$ es la longitud de la curva
- ▶ $\mathbf{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización p.l.d.a., $g(t) = a(1-t) + bt$
 $\implies \mathbf{r} \circ g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización equivalente a \mathbf{r}

Aplicación: Mastitis — Preliminares

Curvatura

- ▶ \mathbf{r} parametrización p.l.d.a. $\implies \|\ddot{\mathbf{r}}\| = \|\dot{\mathbf{r}}\|^3 \kappa$ curvatura
- ▶ $1/\|\ddot{\mathbf{r}}\|$ es el radio de curvatura



Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

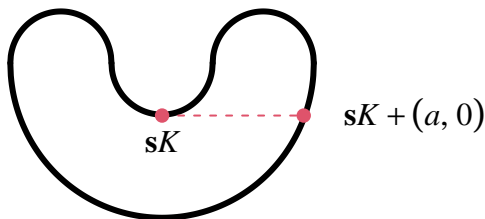
- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$
- ▶ $sK :=$ centroide de Steiner = centro de gravedad

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$
- ▶ $\mathbf{s}K :=$ centroide de Steiner = centro de gravedad
- ▶ $\mathbf{r}_K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular de la frontera de K tal que $\mathbf{r}_K(0) = (a, 0)$, $a = \sup\{x \mid \mathbf{s}K + (x, 0) \in K\}$;



Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$
- ▶ $\mathbf{s}K :=$ centroide de Steiner = centro de gravedad
- ▶ $\mathbf{r}_K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular de la frontera de K tal que $\mathbf{r}_K(0) = (a, 0)$, $a = \sup\{x \mid \mathbf{s}K + (x, 0) \in K\}$;
 \mathbf{r}_k es la \mathcal{K} -parametrización
- ▶ L_K longitud de K

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$
- ▶ $\mathbf{s}K :=$ centroide de Steiner = centro de gravedad
- ▶ $\mathbf{r}_K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular de la frontera de K tal que $\mathbf{r}_K(0) = (a, 0)$, $a = \sup\{x \mid \mathbf{s}K + (x, 0) \in K\}$; \mathbf{r}_k es la \mathcal{K} -parametrización
- ▶ L_K longitud de K
- ▶ $\mathbf{l}_k : [0, L_K] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización p.l.d.a.

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $\mathcal{K} :=$ conjuntos compactos de \mathbb{R}^2 cuya frontera es una curva simple regular cerrada
- ▶ $K \in \mathcal{K}$
- ▶ $\mathbf{s}K :=$ centroide de Steiner = centro de gravedad
- ▶ $\mathbf{r}_K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización regular de la frontera de K tal que $\mathbf{r}_K(0) = (a, 0)$, $a = \sup\{x \mid \mathbf{s}K + (x, 0) \in K\}$; \mathbf{r}_k es la \mathcal{K} -parametrización
- ▶ L_K longitud de K
- ▶ $\mathbf{l}_k : [0, L_K] \rightarrow \mathbb{R}^2$ parametrización p.l.d.a.
- ▶ ψ_K curvatura

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio
- ▶ \mathbf{r}_X es la \mathcal{K} -parametrización de la frontera de X

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

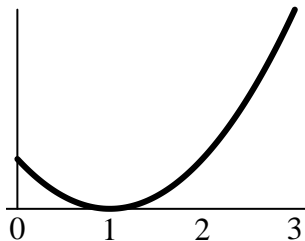
- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio
- ▶ \mathbf{r}_X es la \mathcal{K} -parametrización de la frontera de X
- ▶ ψ_X es la curvatura de la frontera de X

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio
- ▶ \mathbf{r}_X es la \mathcal{K} -parametrización de la frontera de X
- ▶ ψ_X es la curvatura de la frontera de X
- ▶ X tendrá forma muy variable si curvatura cambia mucho

Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio
- ▶ \mathbf{r}_X es la \mathcal{K} -parametrización de la frontera de X
- ▶ ψ_X es la curvatura de la frontera de X
- ▶ X tendrá forma muy variable si curvatura cambia mucho
- ▶ sea f estrictamente convexa con $f(1) = 0$
p.ej. $f(t) = (t - 1)^2$



Aplicación: Mastitis — Variabilidad de formas

- ▶ $X: \Omega \rightarrow \mathcal{K}$ conjunto aleatorio
- ▶ \mathbf{r}_X es la \mathcal{K} -parametrización de la frontera de X
- ▶ ψ_X es la curvatura de la frontera de X
- ▶ X tendrá forma muy variable si curvatura cambia mucho
- ▶ sea f estrictamente convexa con $f(1) = 0$
p.ej. $f(t) = (t - 1)^2$
- ▶ se define $X \stackrel{f}{\underset{\text{sv}}{\leq}} Y \iff \nabla_D^X \leq \nabla_D^Y$ donde

$$\nabla^X := \int_0^1 f\left(\frac{\psi_X(t)}{\int_0^1 \psi_X(t) dt}\right) dt$$

Aplicación: Mastitis — Resultados matemáticos

- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} X + \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ (orden preservado por traslaciones)

Aplicación: Mastitis — Resultados matemáticos

- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} X + \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ (orden preservado por traslaciones)
- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} \lambda X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (preservado por producto por escalar)

Aplicación: Mastitis — Resultados matemáticos

- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} X + \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ (orden preservado por traslaciones)
- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} \lambda X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (preservado por producto por escalar)
- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} \mathbf{A}X \quad \forall \mathbf{A}$ ortogonal 2×2 (preservado por rotaciones)

Aplicación: Mastitis — Resultados matemáticos

- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} X + \mathbf{c} \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$ (orden preservado por traslaciones)
- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} \lambda X \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$ (preservado por producto por escalar)
- ▶ $X \stackrel{f}{\underset{sv}{=}} \mathbf{A}X \quad \forall \mathbf{A}$ ortogonal 2×2 (preservado por rotaciones)
- ▶ preservado por convergencia débil
$$X_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} X, Y_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} Y, \forall m: X_m \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} Y_m \implies X \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} Y$$

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

- ▶ aplicación a microscopía veterinaria

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

- ▶ aplicación a microscopía veterinaria
- ▶ producción láctea bovina

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

- ▶ aplicación a microscopía veterinaria
- ▶ producción láctea bovina
- ▶ se rechaza o penaliza la leche de vacas con mastitis

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

- ▶ aplicación a microscopía veterinaria
- ▶ producción láctea bovina
- ▶ se rechaza o penaliza la leche de vacas con mastitis
- ▶ indicadores de mastitis
 - ▶ alto recuento de células somáticas (epiteliales + leucocitos)
 - ▶ alta proporción de leucocitos entre las células somáticas

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

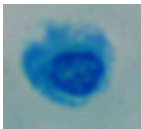
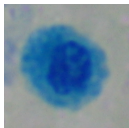
- ▶ aplicación a microscopía veterinaria
- ▶ producción láctea bovina
- ▶ se rechaza o penaliza la leche de vacas con mastitis
- ▶ indicadores de mastitis
 - ▶ alto recuento de células somáticas (epiteliales + leucocitos)
 - ▶ alta proporción de leucocitos entre las células somáticas
- ▶ tinción de núcleos celulares → visibles al microscopio
 - ▶ epiteliales: forma redondeada
 - ▶ leucocitarios: formas variadas (eosinófilos, neutrófilos, linfocitos...)

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

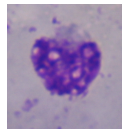
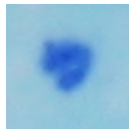
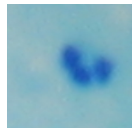
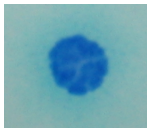
Material

- ▶ $n_X = 23, n_Y = 42$

células epiteliales

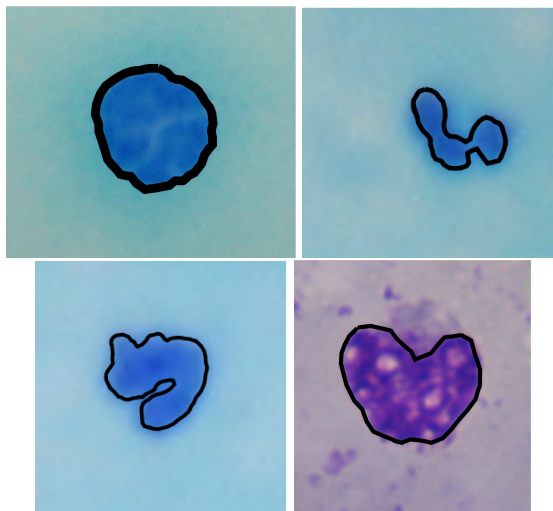


leucocitos



Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos



Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos y conclusión

- ▶ X núcleos de células somáticas en leche de animales sanos
 Y ídem con mastitis

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos y conclusión

- ▶ X núcleos de células somáticas en leche de animales sanos
 Y ídem con mastitis
- ▶ $Y \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} X \iff \nabla^Y \underset{D}{\leq} \nabla^X \iff |\nabla^{Y_1} - \nabla^{Y_2}| \underset{st}{\leq} |\nabla^{X_1} - \nabla^{X_2}|$

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos y conclusión

- ▶ X núcleos de células somáticas en leche de animales sanos
 Y ídem con mastitis
- ▶ $Y \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} X \iff \nabla^Y \underset{D}{\leq} \nabla^X \iff |\nabla^{Y_1} - \nabla^{Y_2}| \underset{st}{\leq} |\nabla^{X_1} - \nabla^{X_2}|$
- ▶ 10.000 aleatorizaciones (X_1, X_2, Y_1, Y_2)

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos y conclusión

- ▶ X núcleos de células somáticas en leche de animales sanos
 Y ídem con mastitis
- ▶ $Y \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} X \iff \nabla^Y \underset{D}{\leq} \nabla^X \iff |\nabla^{Y_1} - \nabla^{Y_2}| \underset{st}{\leq} |\nabla^{X_1} - \nabla^{X_2}|$
- ▶ 10.000 aleatorizaciones (X_1, X_2, Y_1, Y_2)
- ▶ $H_0 : Y \stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} X, H_1 : Y \not\stackrel{f}{\underset{sv}{\leq}} X$

Aplicación: Mastitis — Resultados de la aplicación

Métodos y conclusión

- ▶ X núcleos de células somáticas en leche de animales sanos
 Y ídem con mastitis
- ▶ $Y \stackrel{f}{\leq}_{sv} X \iff \nabla^Y \leq_D \nabla^X \iff |\nabla^{Y_1} - \nabla^{Y_2}| \leq_{st} |\nabla^{X_1} - \nabla^{X_2}|$
- ▶ 10.000 aleatorizaciones (X_1, X_2, Y_1, Y_2)
- ▶ $H_0 : Y \stackrel{f}{\leq}_{sv} X, H_1 : Y \not\stackrel{f}{\leq}_{sv} X$
- ▶ P -valores entre 0'1 y 0'2 $\therefore H_0$
- ▶ recurrir al recuento de células somáticas

Sección 4

Aplicación: ELISA

Aplicación: ELISA — Artículo

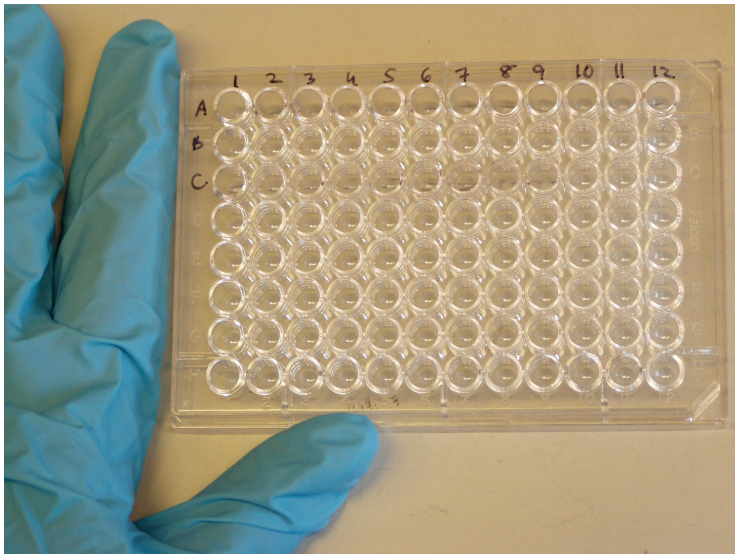
- ▶ Testing usability of a user interface in an embedded device for ELISA plate analysis
- ▶ *Computers and Electronics in Agriculture* 76:325-330
- ▶ J.Á. Baro, C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2011

Aplicación: ELISA — Artículo

- ▶ Prueba de usabilidad de interfaz de usuario en un dispositivo empotrado para analizar placas ELISA
- ▶ *Computers and Electronics in Agriculture* 76:325-330
- ▶ J.Á. Baro, C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2011

Aplicación: ELISA — Contexto

Placa ELISA



Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ placa ELISA
 - ▶ para detectar productos proteicos
 - ▶ 8×12 pozuelos

Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ placa ELISA
 - ▶ para detectar productos proteicos
 - ▶ 8×12 pozuelos
- ▶ *software* diagnóstico caro

Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ placa ELISA
 - ▶ para detectar productos proteicos
 - ▶ 8×12 pozuelos
- ▶ *software* diagnóstico caro
- ▶ PDA como alternativa

Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ placa ELISA
 - ▶ para detectar productos proteicos
 - ▶ 8×12 pozuelos
- ▶ *software* diagnóstico caro
- ▶ PDA como alternativa
- ▶ cuatro toques para calibrar

Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ placa ELISA
 - ▶ para detectar productos proteicos
 - ▶ 8×12 pozuelos
- ▶ *software* diagnóstico caro
- ▶ PDA como alternativa
- ▶ cuatro toques para calibrar
- ▶ elección de método de entrada: dedo o puntero

Aplicación: ELISA — Contexto

P.D.A. N800 de Nokia



Aplicación: ELISA — Contexto

- ▶ no se podían encontrar automáticamente los pozuelos de forma robusta
- ▶ el usuario debía clicar sobre los cuatro pozuelos de las esquinas

Aplicación: ELISA — Contexto

Versión en desarrollo: dos cruces, una al clicar y otra al soltar

elisator-gui.py - Elisa Analyz...

Calibrate

G T M D C P

45079

PRS

21 3 2009

Aplicación: ELISA — Planteamiento

- ▶ se consideran los siguientes criterios
 - ▶ se consideran todos los pozuelos, no sólo los de las esquinas; se calculan $8 \times 12 = 96$ puntos
 - ▶ para cada pozuelo, se considera éxito si el punto correspondiente cae dentro del borde circular del pozuelo; nuestra medida dará el mismo valor independientemente de si el punto cae cerca del centro o cerca del borde
 - ▶ si el punto cae fuera del pozuelo, cuanto más lejos, peor

Aplicación: ELISA — Material

- ▶ 29 fotos de placas ELISA
- ▶ 2 PDA distintas: N800 y N810

Aplicación: ELISA — Métodos

- ▶ el usuario marca cuatro puntos sobre la pantalla

Aplicación: ELISA — Métodos

- ▶ el usuario marca cuatro puntos sobre la pantalla
- ▶ se ajusta un rectángulo a esos puntos

Aplicación: ELISA — Métodos

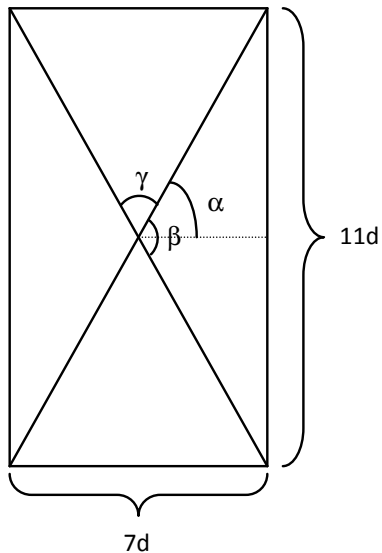
- ▶ el usuario marca cuatro puntos sobre la pantalla
- ▶ se ajusta un rectángulo a esos puntos
- ▶ se calculan los centros de los pozuelos ajustados a ese rectángulo

Aplicación: ELISA — Métodos

- ▶ el usuario marca cuatro puntos sobre la pantalla
- ▶ se ajusta un rectángulo a esos puntos
- ▶ se calculan los centros de los pozuelos ajustados a ese rectángulo
- ▶ procedimiento estadístico
 - ▶ heurístico
 - ▶ alternativas
 - ▶ corrección 3D de perspectiva (poco robusto)
 - ▶ cálculo píxel a píxel (demasiado intensivo para N800)
 - ▶ sea d el diámetro de cada pozuelo: rectángulo $7d \times 11d$

Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo



Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo

- ▶ ángulos

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{11}{7}$$

$$\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{11}{7}$$

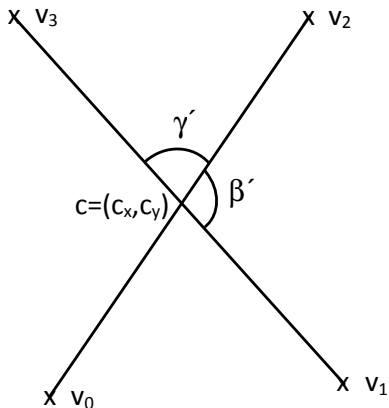
$$\gamma = 180^\circ - 2 \operatorname{arctg} \frac{11}{7}$$

- ▶ distancia entre centro y cualquier vértice = $\frac{d\sqrt{170}}{2}$

Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo

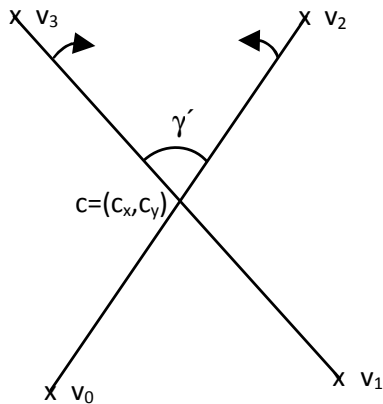
- ▶ $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ = entrada del usuario, $\mathbf{v}_i = (x_i, y_i)$
- ▶ $\mathbf{c} = (c_x, c_y)$



Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo: algoritmo

- ▶ rotar $\overrightarrow{v_0v_2}$ y $\overrightarrow{v_1v_3}$ respecto a \mathbf{c} con ángulo $\frac{|\gamma' - \gamma|}{2}$
- ▶ vértices a distancia $\frac{1}{2}d\sqrt{170}$ desde \mathbf{c} en las 4 direcciones



Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo: algoritmo

$$\blacktriangleright \gamma' = \arccos \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}\|}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo: algoritmo

- ▶ $\gamma' = \arccos \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}\|}$
- ▶ si p.ej. $\gamma' > \gamma$, $\theta := \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma)$

Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo: algoritmo

- ▶ $\gamma' = \arccos \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}_0 \mathbf{v}_2}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_3}\|}$
- ▶ si p.ej. $\gamma' > \gamma$, $\theta := \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma)$
- ▶ matriz de rotación p.ej. para $i \in \{0, 2\}$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - c_x \\ y_i - c_y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} =: \bar{\mathbf{v}}_i$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Ajustar rectángulo: algoritmo

- ▶ $\gamma' = \arccos \frac{\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2} \cdot \overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}}{\|\overrightarrow{\mathbf{v}_0\mathbf{v}_2}\| \cdot \|\overrightarrow{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3}\|}$
- ▶ si p.ej. $\gamma' > \gamma$, $\theta := \frac{1}{2}(\gamma' - \gamma)$
- ▶ matriz de rotación p.ej. para $i \in \{0, 2\}$

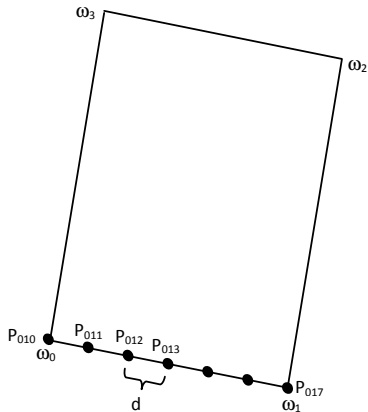
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - c_x \\ y_i - c_y \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{y}_i \end{pmatrix} =: \bar{\mathbf{v}}_i$$

- ▶ ω_i centro del pozuelo de la esquina $i \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbf{d}_i := \frac{\overrightarrow{\mathbf{c}\bar{\mathbf{v}}_i}}{\|\overrightarrow{\mathbf{c}\bar{\mathbf{v}}_i}\|} \frac{1}{2} d \sqrt{170}$$
$$\omega_i = \mathbf{c} + \mathbf{d}_i$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados



Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ \mathbf{p}_{01n} , $0 \leq n \leq 7$ pozuelos sobre el borde del rectángulo

$$\mathbf{a}_{01n} := \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}\|} \cdot n \cdot d = \overrightarrow{\omega_0 \mathbf{p}_{01n}}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ \mathbf{p}_{01n} , $0 \leq n \leq 7$ pozuelos sobre el borde del rectángulo

$$\mathbf{a}_{01n} := \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}\|} \cdot n \cdot d = \overrightarrow{\omega_0 \mathbf{p}_{01n}}$$

- ▶ así, $\mathbf{p}_{01n} = \mathbf{a}_{01n} + \omega_0$

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ \mathbf{p}_{01n} , $0 \leq n \leq 7$ pozuelos sobre el borde del rectángulo

$$\mathbf{a}_{01n} := \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}\|} \cdot n \cdot d = \overrightarrow{\omega_0 \mathbf{p}_{01n}}$$

- ▶ así, $\mathbf{p}_{01n} = \mathbf{a}_{01n} + \omega_0$
- ▶ el conjunto de centros de todos los pozuelos es

$$\{\mathbf{a}_{03m} + \mathbf{p}_{01n} \mid 0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}$$

donde

$$\mathbf{a}_{03m} = \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_3}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_3}\|} \cdot m \cdot d$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ \mathbf{p}_{01n} , $0 \leq n \leq 7$ pozuelos sobre el borde del rectángulo

$$\mathbf{a}_{01n} := \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_1}\|} \cdot n \cdot d = \overrightarrow{\omega_0 \mathbf{p}_{01n}}$$

- ▶ así, $\mathbf{p}_{01n} = \mathbf{a}_{01n} + \omega_0$
- ▶ el conjunto de centros de todos los pozuelos es

$$\{\mathbf{a}_{03m} + \mathbf{p}_{01n} \mid 0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}$$

donde

$$\mathbf{a}_{03m} = \frac{\overrightarrow{\omega_0 \omega_3}}{\|\overrightarrow{\omega_0 \omega_3}\|} \cdot m \cdot d$$

- ▶ para simplificar notación

$$\mathbf{c}_{nm} := \mathbf{a}_{03m} + \mathbf{p}_{01n}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ sean $\{\mathbf{f}_{nm}\}_{\{0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}}$
los centros de los pozuelos reales,
obtenidos con un procedimiento similar
al descrito para los pozuelos estimados

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ sean $\{\mathbf{f}_{nm}\}_{\{0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}}$
los centros de los pozuelos reales,
obtenidos con un procedimiento similar
al descrito para los pozuelos estimados
- ▶ la suma D de distancias entre centros reales y estimados es

$$D = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^{11} \left(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\| - \frac{d}{2} \right) I_{[d/2, \infty]}(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\|)$$

donde I es la indicatriz

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ sean $\{\mathbf{f}_{nm}\}_{\{0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}}$
los centros de los pozuelos reales,
obtenidos con un procedimiento similar
al descrito para los pozuelos estimados
- ▶ la suma D de distancias entre centros reales y estimados es

$$D = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^{11} \left(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\| - \frac{d}{2} \right) I_{[d/2, \infty]}(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\|)$$

donde I es la indicatriz

- ▶ si \mathbf{c}_{nm} pertenece al pozuelo, su sumando vale cero

Aplicación: ELISA — Métodos

Distancia entre pozuelos reales y estimados

- ▶ sean $\{\mathbf{f}_{nm}\}_{\{0 \leq n \leq 7, 0 \leq m \leq 11\}}$
los centros de los pozuelos reales,
obtenidos con un procedimiento similar
al descrito para los pozuelos estimados
- ▶ la suma D de distancias entre centros reales y estimados es

$$D = \sum_{n=0}^7 \sum_{m=0}^{11} \left(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\| - \frac{d}{2} \right) I_{[d/2, \infty]}(\|\mathbf{c}_{nm} - \mathbf{f}_{nm}\|)$$

donde I es la indicatriz

- ▶ si \mathbf{c}_{nm} pertenece al pozuelo, su sumando vale cero
- ▶ si \mathbf{c}_{nm} no pertenece al pozuelo,
su sumando es la distancia de \mathbf{c}_{nm} al pozuelo

Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

- ▶ clicar con: 1 = puntero, 2 = dedo
- ▶ $H_0 : D_{1 \text{ st}} = D_{2 \text{ st}}, \quad H_1 : D_{1 \text{ st}} \leq D_{2 \text{ st}} \cap D_{1 \text{ st}} \neq D_{2 \text{ st}}$

Aplicación: ELISA — Métodos

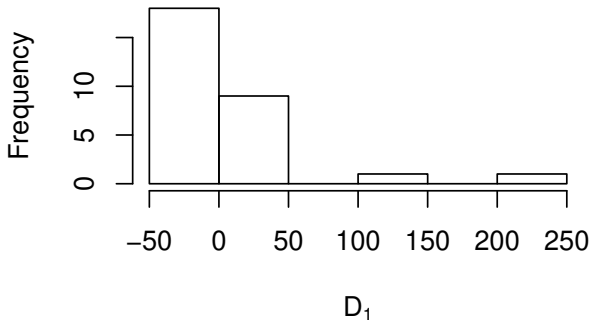
Análisis estadístico

- ▶ clicar con: 1 = puntero, 2 = dedo
- ▶ $H_0 : D_{1\text{st}} = D_{2\text{st}}, \quad H_1 : D_{1\text{st}} \leq D_{2\text{st}} \cap D_{1\text{st}} \neq D_{2\text{st}}$
- ▶ Kolmogórov-Smirnov y WMW exigen continuidad, pero $\Pr(D_1 = 0), \Pr(D_2 = 0) > 0$

Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

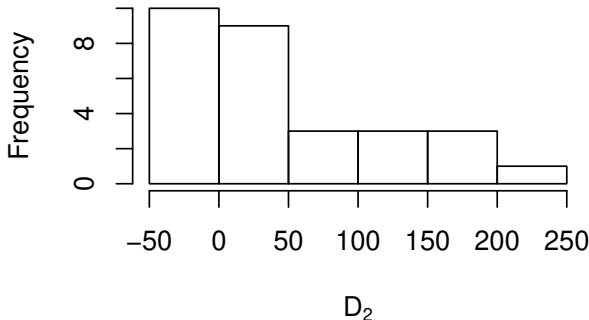
- ▶ clicar con: 1 = puntero, 2 = dedo
- ▶ $H_0 : D_{1\text{st}} = D_{2\text{st}}, \quad H_1 : D_{1\text{st}} \leq D_{2\text{st}} \cap D_{1\text{st}} \neq D_{2\text{st}}$
- ▶ Kolmogórov-Smirnov y WMW exigen continuidad, pero $\Pr(D_1 = 0), \Pr(D_2 = 0) > 0$



Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

- ▶ clicar con: 1 = puntero, 2 = dedo
- ▶ $H_0 : D_{1st} = D_{2st}$, $H_1 : D_{1st} \leq D_{2st} \cap D_{1st} \neq D_{2st}$
- ▶ Kolmogórov-Smirnov y WMW exigen continuidad, pero $\Pr(D_1 = 0)$, $\Pr(D_2 = 0) > 0$



Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

- ▶ clicar con: 1 = puntero, 2 = dedo
- ▶ $H_0 : D_1 \stackrel{\text{st}}{=} D_2, \quad H_1 : D_1 \stackrel{\text{st}}{\leq} D_2 \cap D_1 \stackrel{\text{st}}{\neq} D_2$
- ▶ Kolmogórov-Smirnov y WMW exigen continuidad, pero $\Pr(D_1 = 0), \Pr(D_2 = 0) > 0$
- ▶ sea la variable continua

$$\tilde{D}_i = \begin{cases} D_i & \text{si } D_i > 0 \\ U & \text{si } D_i = 0 \text{ con } U \hookrightarrow \mathcal{U}(-1, 0) \end{cases}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

$$\blacktriangleright \tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}} \implies D_{1\text{st}} = D_{2\text{st}}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

$$\blacktriangleright \tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}} \implies D_{1\text{st}} = D_{2\text{st}}$$

$$\blacktriangleright \tilde{D}_{1\text{st}} \leq \tilde{D}_{2\text{st}} \cap \tilde{D}_{1\text{st}} \neq \tilde{D}_{2\text{st}} \implies D_{1\text{st}} \leq D_{2\text{st}} \cap D_{1\text{st}} \neq D_{2\text{st}}$$

Aplicación: ELISA — Métodos

Análisis estadístico

- ▶ $\tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}} \implies D_{1\text{st}} = D_{2\text{st}}$
- ▶ $\tilde{D}_{1\text{st}} \leq \tilde{D}_{2\text{st}} \cap \tilde{D}_{1\text{st}} \neq \tilde{D}_{2\text{st}} \implies D_{1\text{st}} \leq D_{2\text{st}} \cap D_{1\text{st}} \neq D_{2\text{st}}$
- ▶ $H_0 : \tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}}, \quad H_1 : \tilde{D}_{1\text{st}} \leq \tilde{D}_{2\text{st}} \cap \tilde{D}_{1\text{st}} \neq \tilde{D}_{2\text{st}}$

Aplicación: ELISA — Resultados

- ▶ $H_0 : \tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}}, \quad H_1 : \tilde{D}_{1\text{st}} \leq \tilde{D}_{2\text{st}} \cap \tilde{D}_{1\text{st}} \neq \tilde{D}_{2\text{st}}$
- ▶ \tilde{D} es producto de una transformación aleatoria
→ se generan 10.000 muestras
- ▶ P -valores: KS 0'11, WMW 0'028

Aplicación: ELISA — Resultados

- ▶ $H_0 : \tilde{D}_{1\text{st}} = \tilde{D}_{2\text{st}}, \quad H_1 : \tilde{D}_{1\text{st}} \leq \tilde{D}_{2\text{st}} \cap \tilde{D}_{1\text{st}} \neq \tilde{D}_{2\text{st}}$
- ▶ \tilde{D} es producto de una transformación aleatoria
→ se generan 10.000 muestras
- ▶ P -valores: KS 0'11, WMW 0'028
- ▶ MWM más potente; se rechaza H_0

Sección 5

Aplicación: Córnea

Aplicación: Córnea — Artículo

- ▶ Ranking star-shaped valued mappings with respect to shape variability
- ▶ *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 48:1-12
- ▶ C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2012

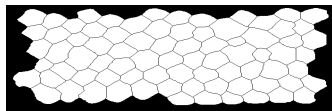
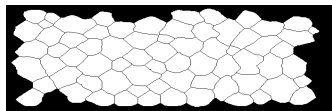
Aplicación: Córnea — Artículo

- ▶ Ordenar funciones con valores estrellados según variabilidad de formas
- ▶ *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 48:1-12
- ▶ C. Carleos, M.C. López-Díaz y M. López-Díaz
- ▶ 2012

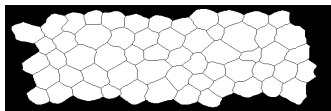
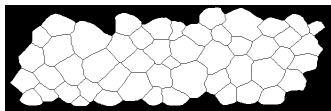
Aplicación: Córnea — Contexto

- ▶ variabilidad de formas:
criterio usual en definición de síntomas
- ▶ oftalmología: endotelio corneal
- ▶ capa simple de células homogéneas que cubre el interior
- ▶ las células se remplazan muy despacio
- ▶ si se pierde una: se alargan o migran células adyacentes
- ▶ cuanto más homogéneas sean las células,
mejor es el estado de salud del endotelio

sanos

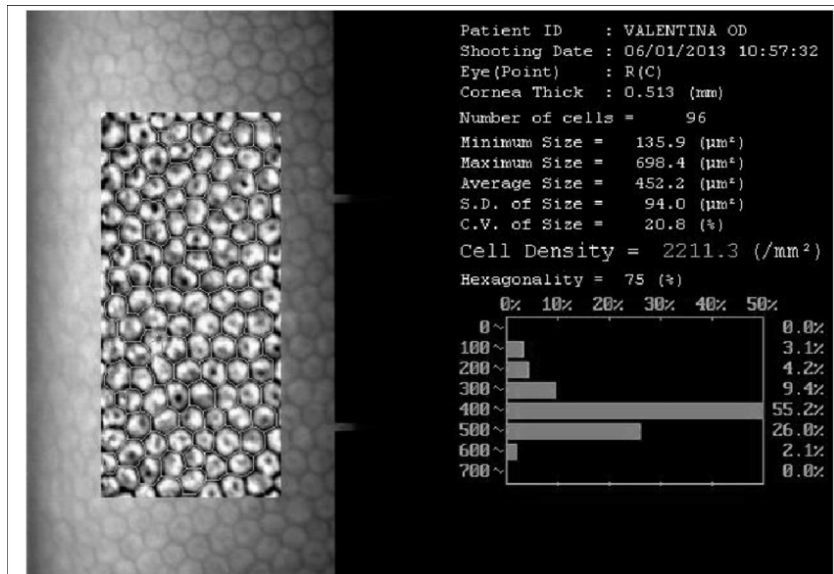


enfermos



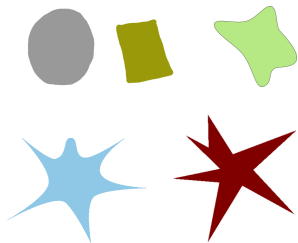
Aplicación: Córnea — Contexto

- ▶ medida clásica: hexagonalidad = % de células hexagonales

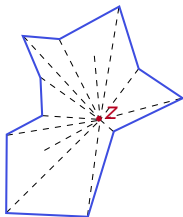


Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ conjuntos estrellados: $\exists \mathbf{z} \in A, \forall \mathbf{x} \in A, [\mathbf{z}, \mathbf{x}] \subset A$



estrellados



no estrellados

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ **núcleo** de A

$$\text{Núc}A := \{ \mathbf{a} \in A \mid L \cap A \text{ es un intervalo } \forall L \text{ recta con } \mathbf{a} \in L \}$$

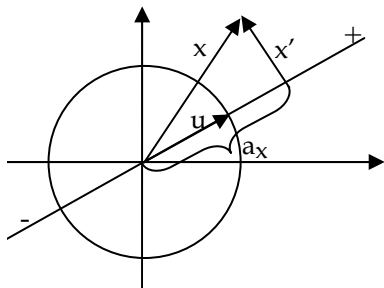


Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ función soporte del conjunto B

$$\gamma(\cdot, B) : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \mapsto \gamma(\mathbf{u}, B) = \sup_{\mathbf{b} \in B} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$$

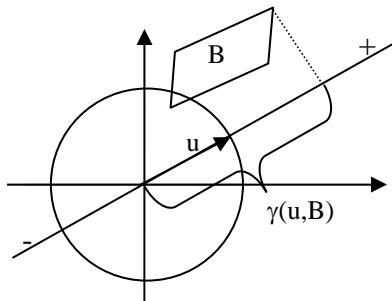


Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ función soporte del conjunto B

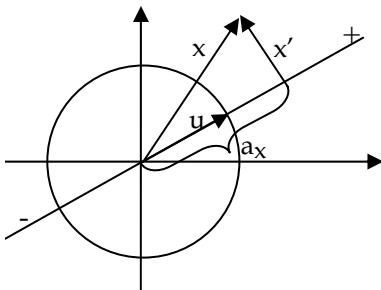
$$\gamma(\cdot, B) : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbf{u} \mapsto \gamma(\mathbf{u}, B) = \sup_{\mathbf{b} \in B} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$$



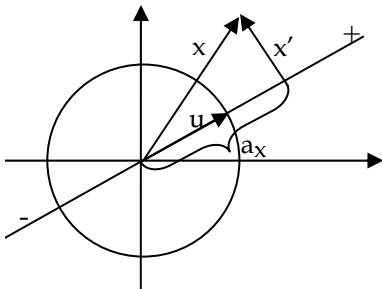
Aplicación: Córnea — Métodos

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in S^{n-1}, \exists a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathbf{x}', \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle = 0$



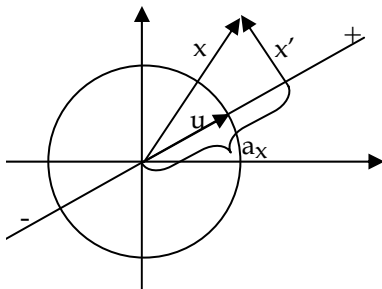
Aplicación: Córnea — Métodos

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in S^{n-1}, \exists a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathbf{x}', \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle = 0$
 $\therefore 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - a_{\mathbf{x}}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$



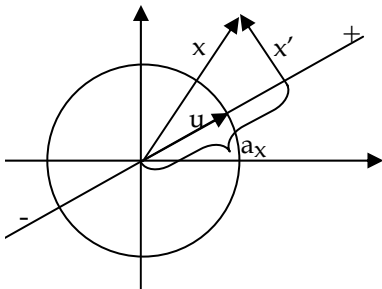
Aplicación: Córnea — Métodos

- $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in S^{n-1}, \exists a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathbf{x}', \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle = 0$
 $\therefore 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - a_{\mathbf{x}}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad \therefore a_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$



Aplicación: Córnea — Métodos

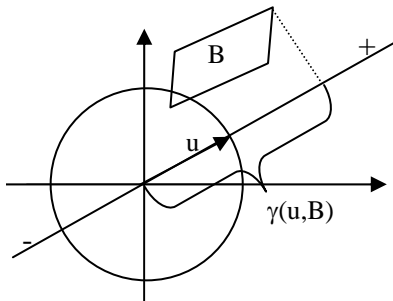
- ▶ $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \forall \mathbf{u} \in S^{n-1}, \exists a_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}, \exists \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^n: \mathbf{x} = a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} + \mathbf{x}', \langle \mathbf{u}, \mathbf{x}' \rangle = 0$
 $\therefore 0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} - a_{\mathbf{x}}\mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle - a_{\mathbf{x}}\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \quad \therefore a_{\mathbf{x}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle$
- ▶ $a_{\mathbf{x}}$ es la proyección escalar ortogonal de \mathbf{x} sobre la recta $\overline{0\mathbf{u}}$



Aplicación: Córnea — Métodos

- $\forall B \subset \mathbb{R}^n$ conjunto convexo acotado, $\forall \mathbf{u} \in S^{n-1}$,

$$\gamma(\mathbf{u}, B) := \sup_{\mathbf{b} \in B} \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle = \sup_{\mathbf{b} \in B} a_{\mathbf{b}}$$



Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ centroide de Steiner o centro de gravedad

$$\mathbf{s}B = n \int_{S^{n-1}} \mathbf{u} \gamma(\mathbf{u}, B) \, d\mu(\mathbf{u})$$

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ centroide de Steiner o centro de gravedad

$$\mathbf{s}B = n \int_{S^{n-1}} \mathbf{u} \gamma(\mathbf{u}, B) \, d\mu(\mathbf{u})$$

- ▶ $\gamma(\cdot, B)$ es la función soporte de B sobre S^{n-1}

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ centroide de Steiner o centro de gravedad

$$\mathbf{s}B = n \int_{S^{n-1}} \mathbf{u} \gamma(\mathbf{u}, B) \, d\mu(\mathbf{u})$$

- ▶ $\gamma(\cdot, B)$ es la función soporte de B sobre S^{n-1}
- ▶ μ es medida tal que $\mu(S^{n-1}) = 1$

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ centroide de Steiner o centro de gravedad

$$\mathbf{s}B = n \int_{S^{n-1}} \mathbf{u} \gamma(\mathbf{u}, B) \, d\mu(\mathbf{u})$$

- ▶ $\gamma(\cdot, B)$ es la función soporte de B sobre S^{n-1}
- ▶ μ es medida tal que $\mu(S^{n-1}) = 1$
- ▶ $\mathbf{s}(\alpha B + \beta C) = \alpha \mathbf{s}B + \beta \mathbf{s}C$

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ centroide de Steiner o centro de gravedad

$$\mathbf{s}B = n \int_{S^{n-1}} \mathbf{u} \gamma(\mathbf{u}, B) \, d\mu(\mathbf{u})$$

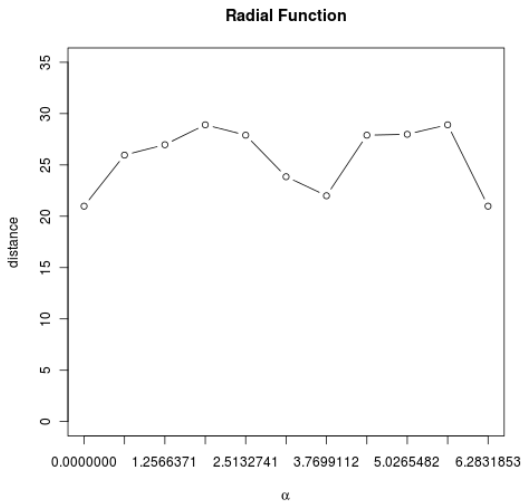
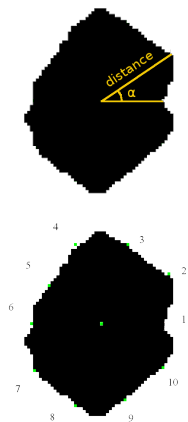
- ▶ $\gamma(\cdot, B)$ es la función soporte de B sobre S^{n-1}
- ▶ μ es medida tal que $\mu(S^{n-1}) = 1$
- ▶ $\mathbf{s}(\alpha B + \beta C) = \alpha \mathbf{s}B + \beta \mathbf{s}C$
- ▶ $\mathbf{s}(\mathbf{c} + B) = \mathbf{c} + \mathbf{s}B$

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ A conjunto estrellado $\implies (\text{Núc}A)^\circ$ es convexo
- ▶ $\tilde{A} := A - s(\text{Núc}A)^\circ$
- ▶ \tilde{A} es estrellado y $\mathbf{0} \in \text{Núc}A$
- ▶ función radial

$$\begin{aligned} \rho_A : S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{u} &\longmapsto \sup\{\alpha \geq 0 \mid \alpha \mathbf{u} \in \tilde{A}\} \end{aligned}$$

Aplicación: Córnea — Métodos



Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ orden de variabilidad de formas
 - ▶ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ estrictamente convexa

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ orden de variabilidad de formas
 - ▶ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ estrictamente convexa
 - ▶ \mathcal{S} conjuntos estrellados de \mathbb{R}^n

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ orden de variabilidad de formas
 - ▶ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ estrictamente convexa
 - ▶ \mathcal{S} conjuntos estrellados de \mathbb{R}^n
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ conjunto aleatorio

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ orden de variabilidad de formas
 - ▶ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ estrictamente convexa
 - ▶ \mathcal{S} conjuntos estrellados de \mathbb{R}^n
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ conjunto aleatorio
 - ▶ $R_X^f := \int_{S^{n-1}} f\left(\frac{\rho_X(\mathbf{u})}{\int_{S^{n-1}} \rho_X(\mathbf{v}) d\mu(\mathbf{v})}\right) d\mu(\mathbf{u})$

Aplicación: Córnea — Métodos

- ▶ orden de variabilidad de formas
 - ▶ $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ estrictamente convexa
 - ▶ \mathcal{S} conjuntos estrellados de \mathbb{R}^n
 - ▶ $X : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$ conjunto aleatorio
 - ▶ $R_X^f := \int_{S^{n-1}} f\left(\frac{\rho_X(\mathbf{u})}{\int_{S^{n-1}} \rho_X(\mathbf{v}) d\mu(\mathbf{v})}\right) d\mu(\mathbf{u})$
 - ▶ $X \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{\leq}} Y \iff R_X^f \leq R_Y^f$

Aplicación: Córnea — Resultados matemáticos

► invariante bajo

► traslaciones: $X + \mathbf{c} \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{=}} X$

► producto por escalar: $\lambda \neq 0 \implies \lambda X \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{=}} X$

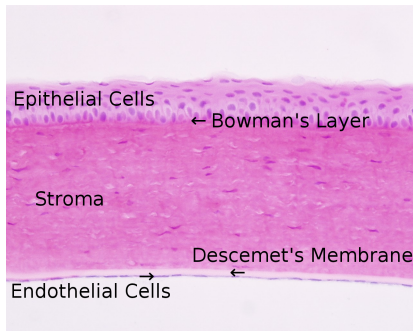
► rotaciones: \mathbf{P} ortogonal $\implies \mathbf{P}X \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{=}} X$

► $X_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X, Y_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} Y, X_m \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{\leq}} Y_m \implies X \stackrel{f}{\underset{\text{rs}}{\leq}} Y$

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Diagnóstico mediante forma celular

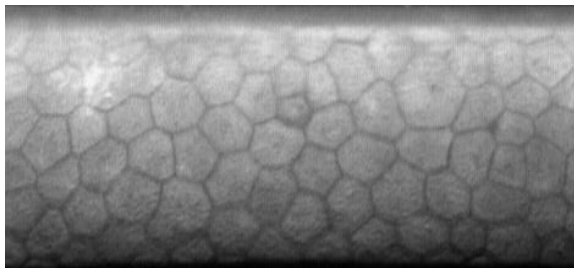
- ▶ córnea = tres capas
 - ▶ epitelio
 - ▶ estroma
 - ▶ endotelio



Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Diagnóstico mediante forma celular

- ▶ endotelio
 - ▶ capa simple de células cuboides
 - ▶ sin capacidad de mitosis
 - ▶ su número disminuye con la edad
 - ▶ al morir una, las vecinas crecen y cambian forma (pleomorfismo)
 - ▶ homogeneidad de formas \propto estado de salud



Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ X = forma de una célula endotelial de individuo sano
- ▶ Y = forma de una célula endotelial de individuo enfermo

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ X = forma de una célula endotelial de individuo sano
- ▶ Y = forma de una célula endotelial de individuo enfermo
- ▶ se desea demostrar que $X \underset{rs}{\overset{f}{<}} Y \quad \therefore \quad X \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} Y \cap X \underset{rs}{\overset{f}{\neq}} Y$

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ X = forma de una célula endotelial de individuo sano
- ▶ Y = forma de una célula endotelial de individuo enfermo
- ▶ se desea demostrar que $X \underset{rs}{f} < Y \quad \therefore \quad X \underset{rs}{f} \leq Y \cap X \underset{rs}{f} \neq Y$

1. $H_0 : X \underset{rs}{f} \leq Y, H_1 : X \underset{rs}{f} \not\leq Y$ y mantener H_0

2. $H_0 : X \underset{rs}{f} = Y, H_1 : X \underset{rs}{f} \neq Y$ y rechazar H_0

como $X \underset{rs}{f} = Y \equiv Y \underset{rs}{f} \leq X \cap Y \underset{rs}{f} \leq X$

basta $H_0 : Y \underset{rs}{f} \leq X, H_1 : Y \underset{rs}{f} \not\leq X$ y rechazar H_0

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ X = forma de una célula endotelial de individuo sano
- ▶ Y = forma de una célula endotelial de individuo enfermo
- ▶ se desea demostrar que $X \underset{rs}{\overset{f}{<}} Y \quad \therefore \quad X \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} Y \cap X \underset{rs}{\overset{f}{\neq}} Y$

1. $H_0 : X \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} Y, H_1 : X \underset{rs}{\overset{f}{\not\leq}} Y$ y mantener H_0

2. $H_0 : X \underset{rs}{\overset{f}{=}} Y, H_1 : X \underset{rs}{\overset{f}{\neq}} Y$ y rechazar H_0

como $X \underset{rs}{\overset{f}{=}} Y \equiv Y \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} X \cap Y \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} X$

basta $H_0 : Y \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} X, H_1 : Y \underset{rs}{\overset{f}{\not\leq}} X$ y rechazar H_0

▶ $X \underset{rs}{\overset{f}{\leq}} Y \quad \equiv \quad R_{X \underset{D}{D}}^f \leq R_{Y \underset{D}{D}}^f \quad \equiv \quad |R_{X_1}^f - R_{X_2}^f| \leq_{st} |R_{Y_1}^f - R_{Y_2}^f|$

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ muestra de tamaño n_X
 $\xrightarrow{N \text{ veces}}$ dos muestras de tamaño $n_X/2$ de X_1 y X_2

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ muestra de tamaño n_X
 $\xrightarrow{N \text{ veces}}$ dos muestras de tamaño $n_X/2$ de X_1 y X_2
- ▶ $f(x) = x^k$ para $k = 2, 10, 20$

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ muestra de tamaño n_X
 $\xrightarrow{N \text{ veces}}$ dos muestras de tamaño $n_X/2$ de X_1 y X_2
- ▶ $f(x) = x^k$ para $k = 2, 10, 20$
- ▶ material
 - ▶ $n_X = 7.143, n_Y = 4.052$

Aplicación: Córnea — Resultados de la aplicación

Contraste de variabilidad de formas

- ▶ muestra de tamaño n_X
 $\xrightarrow{N \text{ veces}}$ dos muestras de tamaño $n_X/2$ de X_1 y X_2
- ▶ $f(x) = x^k$ para $k = 2, 10, 20$
- ▶ material
 - ▶ $n_X = 7.143, n_Y = 4.052$
- ▶ resultado
 - ▶ $H_0 : X \stackrel{f}{\leq}_{rs} Y, H_1 : X \not\stackrel{f}{\leq}_{rs} Y \rightarrow P\text{-val} > 0.9$

	k	K-S	WMW
	2	0'103	0'066
▶ $H_0 : Y \stackrel{f}{\leq}_{rs} X, H_1 : Y \not\stackrel{f}{\leq}_{rs} X \rightarrow P\text{-val}$	10	0'063	0'046
	20	0'071	0'031
	% hex	0'222	0'132

Sección 6

Agradecimientos

Agradecimientos

- ▶ Guillermo Ayala (U. Valencia)
- ▶ Lucía Martínez-Costa (Hospital Dr. Peset)
- ▶ María Concepción López-Díaz (U. Oviedo)
- ▶ Mario Quevedo (U. Oviedo)
- ▶ Norberto Corral (U. Oviedo)