Cuestiones de repaso

Inferencia Estadística

Facultad de Ciencias

Universidad Oviedo

Curso 2021-22

4. Distribución triangular

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

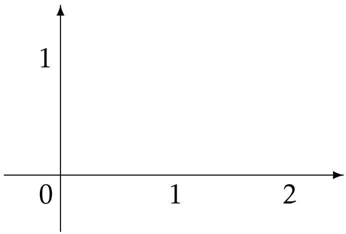
Calcula su función de distribución, su media y su varianza.
Calcula las siguientes probabilidades: $P[X \leqslant 0'5]$ y $P[X > 1]$.

4. Distribución triangular

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula su función de distribución, su media y su varianza.
Calcula las siguientes probabilidades: $P[X \leqslant 0'5]$ y $P[X > 1]$.

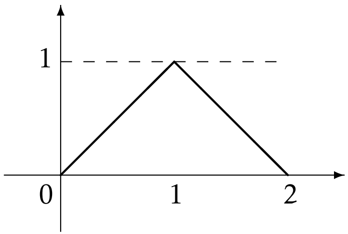


4. Distribución triangular

Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula su función de distribución, su media y su varianza.
Calcula las siguientes probabilidades: $P[X \leqslant 0'5]$ y $P[X > 1]$.



4. Triangular: función de distribución

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F_X(x) = \begin{cases} & x < 0 \\ & 0 \leqslant x < 1 \\ & 1 \leqslant x < 2 \\ & 2 \leqslant x \end{cases}$$

4. Triangular: función de distribución

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & x < 0 \\ & 0 \leqslant x < 1 \\ & 1 \leqslant x < 2 \\ & 2 \leqslant x \end{cases}$$

4. Triangular: función de distribución

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{x} t\, dt = \left|\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2} & 0 \leqslant x < 1 \\ & \\ & 1 \leqslant x < 2 \\ & 2 \leqslant x \end{cases}$$

4. Triangular: función de distribución

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

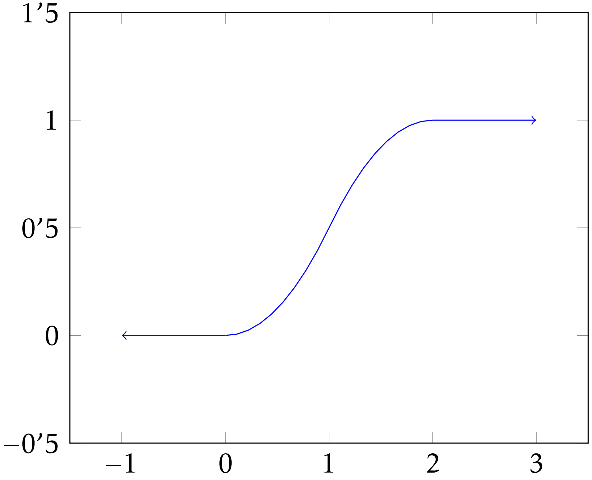
$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{x} t\,dt = \left|\frac{t^2}{2}\right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2} & 0 \leqslant x < 1 \\ \displaystyle\frac{1}{2} + \int_{1}^{x} (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \left|2t - \frac{t^2}{2}\right|_{t=1}^{t=x} = & \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leqslant x < 2 \\ & 2 \leqslant x \end{cases}$$

4. Triangular: función de distribución

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt$$

$$F_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0 & x < 0 \\ \displaystyle\int_{0}^{x} t\, dt = \left| \frac{t^2}{2} \right|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^2}{2} & 0 \leqslant x < 1 \\ \displaystyle\frac{1}{2} + \int_{1}^{x} (2-t)\, dt = \frac{1}{2} + \left| 2t - \frac{t^2}{2} \right|_{t=1}^{t=x} = & \\ \displaystyle\quad = \frac{1}{2} + 2x - \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2} = 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & 1 \leqslant x < 2 \\ 1 & 2 \leqslant x \end{cases}$$

4. Triangular: función de distribución



4. Triangular: media

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$

4. Triangular: media

$$\mathcal{E}\left[X\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X\left(x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x x \,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x =$$

4. Triangular: media

$$\mathcal{E}\left[\mathrm{X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\mathrm{X}}\left(x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{1} x x \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} x(2-x) \,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{0}^{1} x^2 \,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} (2x - x^2) \,\mathrm{d}x =$$

4. Triangular: media

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 xx\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx =$$

$$= \left|\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} + \left|x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2} =$$

4. Triangular: media

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x x\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx =$$

$$= \left|\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{x=1} + \left|x^2 - \frac{x^3}{3}\right|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{3} - 0 \quad + \quad 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

4. Triangular: media

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 x(2-x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x - x^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} \right|_{x=0}^{x=1} + \left| x^2 - \frac{x^3}{3} \right|_{x=1}^{x=2} =$$

$$= \frac{1}{3} - 0 \quad + \quad 4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{12}{3} - \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

4. Triangular: varianza

$$\text{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2 = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1$$

4. Triangular: varianza

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2 = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1$$

$$\mathcal{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, \mathrm{d}x =$$

4. Triangular: varianza

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2 = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1$$

$$\mathcal{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x =$$

4. Triangular: varianza

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2 = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1$$

$$\mathcal{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{x=1} + \left|\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{4} - 0 + \frac{16}{3} - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6}$$

4. Triangular: varianza

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2 = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1$$

$$\mathcal{E}\left[X^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left|\frac{x^4}{4}\right|_{x=0}^{x=1} + \left|\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right|_{x=1}^{x=2} = \frac{1}{4} - 0 + \frac{16}{3} - \frac{16}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$$

11. Media y varianza muestrales.

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con media μ y desvío típico σ.

1. Calcula la esperanza y la varianza de la media muestral.
2. Calcula la esperanza de la varianza muestral.

11.1. Esperanza y varianza de $\bar{X}$.

11.1. Esperanza y varianza de $\bar{X}$.

$$\mathcal{E}\left[\bar{X}\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

11.1. Esperanza y varianza de $\bar{X}$.

$$\mathcal{E}\left[\bar{X}\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[X_i\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \frac{1}{n}n\mu = \mu$$

Como $X_1, \ldots, X_n$ son independientes, luego linealmente independientes, la varianza de la suma es la suma de varianzas:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}\left[\bar{X}\right] &= \mathrm{Var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\left[X_i\right] \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n} \end{aligned}$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \mathcal{E}\left[(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2\right] =$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \mathcal{E}\left[(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \mathcal{E}\left[(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] + \mathcal{E}\left[(\mu - \bar{X})^2\right] + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \mathcal{E}\left[(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] + \mathcal{E}\left[(\mu - \bar{X})^2\right] + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \sigma^2 + \mathrm{Var}\left[\bar{X}\right] + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \mathcal{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \mathcal{E}\left[(X_i - \mu + \mu - \bar{X})^2\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2 + (\mu - \bar{X})^2 + 2(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \mathcal{E}\left[(X_i - \mu)^2\right] + \mathcal{E}\left[(\mu - \bar{X})^2\right] + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \sigma^2 + \mathrm{Var}\left[\bar{X}\right] + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] =$$

$$= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right]$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=$$

$$=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-X_j)\right]=$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=$$

$$=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-X_j)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-X_j)\right]=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right]=$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=$$

$$=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-X_j)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-X_j)\right]=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right]=$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X_i,X_j\right]=-\frac{1}{n}\left(\mathrm{Cov}\left[X_i,X_i\right]+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathrm{Cov}\left[X_i,X_j\right]\right)=$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

$$\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-\bar{X})\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=$$

$$=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mu-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j\right)\right]=\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu-X_j)\right]=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(\mu-X_j)\right]=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i-\mu)(X_j-\mu)\right]=$$

$$=-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}\left[X_i,X_j\right]=-\frac{1}{n}\left(\mathrm{Cov}\left[X_i,X_i\right]+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\mathrm{Cov}\left[X_i,X_j\right]\right)=$$

$$=-(\mathrm{Var}\left[X_i\right]+0)/n=-\sigma^2/n$$

11.2. Esperanza de S_X^2.

Resumiendo:

$$\mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \bar{X})^2\right] = \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} + 2\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right]$$

$$\mathcal{E}\left[(X_i - \mu)(\mu - \bar{X})\right] = -\sigma^2/n$$

$$\Longrightarrow \mathcal{E}\left[S_X^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} + 2\left[-\frac{\sigma^2}{n}\right]\right) =$$

$$= \frac{1}{n}n\left(\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}\right) = \sigma^2\frac{n-1}{n}$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

Si X sigue una distribución beta $\beta(4,1)$, calcula la función de densidad y de distribución de la variable $Y = -\ln X$, así como su esperanza y su varianza.

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución
- función de densidad
- esperanza
- varianza

12. $X \sim \beta(4, 1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\,dt = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\,\mathrm{d}t = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = (0,1) \Longrightarrow Y(\Omega) = (0,\infty)$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3 \mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\, dt = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = (0,1) \Longrightarrow Y(\Omega) = (0,\infty)$$

$$y > 0 \Longrightarrow F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P[-\ln X \leqslant y] = P[X \geqslant e^{-y}] =$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\,dt = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = (0,1) \Longrightarrow Y(\Omega) = (0,\infty)$$

$$y > 0 \Longrightarrow F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P[-\ln X \leqslant y] = P[X \geqslant e^{-y}] =$$

$$= 1 - F_X(e^{-y}) =$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\,dt = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = (0,1) \Longrightarrow Y(\Omega) = (0,\infty)$$

$$y > 0 \Longrightarrow F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P[-\ln X \leqslant y] = P[X \geqslant e^{-y}] =$$

$$= 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-4y}$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{\Gamma(4+1)}{\Gamma(4)\Gamma(1)} x^{4-1}(1-x)^{1-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(x)$$

$$f_X(x) = 4x^3\mathbb{1}_{(0,1)}(x) \Longrightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x 4t^3\,dt = x^4, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

$$X(\Omega) = (0,1) \Longrightarrow Y(\Omega) = (0,\infty)$$

$$y > 0 \Longrightarrow F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P[-\ln X \leqslant y] = P[X \geqslant e^{-y}] =$$

$$= 1 - F_X(e^{-y}) = 1 - e^{-4y} \sim \operatorname{Exp}(4)$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \text{Exp}(4)$$

- función de densidad

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \text{Exp}(4)$$

- función de densidad

$$f_Y(y) = 4e^{-4y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \text{Exp}(4)$$

- función de densidad

$$f_Y(y) = 4e^{-4y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

- esperanza

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \text{Exp}(4)$$

- función de densidad

$$f_Y(y) = 4e^{-4y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

- esperanza

$$\mathcal{E}[Y] = \frac{1}{4}$$

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \text{Exp}(4)$$

- función de densidad

$$f_Y(y) = 4e^{-4y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

- esperanza

$$\mathcal{E}[Y] = \frac{1}{4}$$

- varianza

12. $X \sim \beta(4,1) \Longrightarrow Y = -\ln X \sim$ ¿?

- función de distribución

$$Y \sim \mathrm{Exp}(4)$$

- función de densidad

$$f_Y(y) = 4e^{-4y}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

- esperanza

$$\mathcal{E}[Y] = \frac{1}{4}$$

- varianza

$$\mathrm{Var}[Y] = \frac{1}{16}$$

13. Reproductividad

1. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?
2. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$? ¿Y la de la media?

13. Reproductividad

1. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?

   La distribución binomial es reproductiva en su primer parámetro, luego:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$$

13. Reproductividad

1. Sean $X_1, \dots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{B}(n_i, p)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?

   La distribución binomial es reproductiva en su primer parámetro, luego:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} n_i, p\right)$$

2. Sean $X_1, \dots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$? ¿Y la de la media?

13. Reproductividad

2. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?

   La distribución gausiana es reproductiva, luego:

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$$

   Como esperanza y varianza de suma de variables independientes son suma de esperanzas y varianzas:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}\right)$$

13. Reproductividad

2. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}\right)$$

¿Y la de la media?

13. Reproductividad

2. Sean $X_1, \ldots, X_m$ variables aleatorias independientes con distribución $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$. ¿Cuál es la distribución de la suma $X_1 + \cdots + X_m$?

$$\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{m} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}\right)$$

¿Y la de la media?

$$\bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_i, \frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}\right)$$

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\bar{\mu}, \frac{1}{\sqrt{m}}\sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2}\right) = \mathcal{N}\left(\bar{\mu}, \sqrt{\frac{\overline{\sigma^2}}{m}}\right)$$