Inferencia - Repaso

C. Carleos - N. Corral

19 de septiembre de 2022

Índice

1. Estadística

- descriptiva: resumir $(x_1, \ldots, x_n)$
- probabilidad: $X, \mathcal{A}, P$
- inferencia: ¿qué se puede decir sobre X a partir de P y $(x_1, \ldots, x_n)$?

2. Descriptiva

2.1. univariante

2.1.1. variables estadísticas cualitativas, categóricas, dicótomas, polítomas, atributos

1. nominales
   - distribución de frecuencias
   - diagrama de sectores o de barras
2. ordinales
   - distribución de frecuencias
   - mediana
   - diagrama de barras

2.1.2. variables estadísticas cuantitativas, numéricas

- media, desvío típico
  - sensibles
- mediana, recorrido intercuartílico
  - robustas

1. discretas
   - diagrama de barras
2. continuas
   - histograma
   - diagrama de cajas (para comparar entre grupos)

2.2. bivariante

2.2.1. cualitativa frente a cualitativa

- frecuencias relativas condicionadas
- mosaicplot

2.2.2. cuantitativa frente a cualitativa

- descriptivos condicionados
- diagramas de cajas (boxplot)

2.2.3. cuantitativa frente a cuantitativa

- coeficiente de correlación
- diagrama de dispersión (nube de puntos)

3. Probabilidad

3.1. definición

- $\mathcal{A}$ es σ-álgebra sobre Ω

$$\begin{array}{rccc} \Pr: & \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \Pr A \end{array}$$

- axiomas de Kolmogórov
  - $0 \leq \Pr A \leq 1$
  - $\Pr \Omega = 1$
  - si $A_1, A_2, \ldots$ incompatibles (disjuntos), entonces $\Pr A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \Pr A_1 + \Pr A_2 + \ldots$
- propiedades
  - $\Pr \emptyset = 0$
  - $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \Pr A \leq \Pr B$
  - $\Pr A \leq 1$
  - $\Pr A^c = 1 - \Pr A$
  - $\Pr A \cup B = \Pr A + \Pr B - \Pr A \cap B$

- condicionada
  - $\Pr A \mid B = \frac{\Pr A \cap B}{\Pr B}$
  - A y B independientes $\iff \Pr A \mid B = \Pr A \iff \Pr A \cap B = \Pr A \cdot \Pr B$
- probabilidad total
  - $A_1, \ldots, A_n$ partición
    - A_i incompatible con A_j
    - $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$
  - $\Pr B = \sum_{i=1}^{n} \Pr A_i \cdot \Pr B \mid A_i$
- Bayes
  - $\Pr A_i \mid B = \frac{\Pr A_i \cap B}{\Pr B} = \frac{\Pr B|A_i \cdot \Pr A_i}{\Pr B} = \frac{\Pr B|A_i \cdot \Pr A_i}{\sum_{i=j}^{n} \Pr A_j \cdot \Pr B|A_j} \propto \Pr B \mid A_i \cdot \Pr A_i$

3.2. variable aleatoria

- cuantificación de los resultados de un experimento aleatorio

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \to & \mathbb{R} \\ & \omega & \mapsto & X(\omega) \end{array}$$

- permite trabajar con modelos probabilísticos sobre $\mathbb{R}$
- ojiva / función de distribución / función de distribución acumulada
  - $F(x) = F_X(x) = \Pr\{\omega : X(\omega) \leq x\} = \Pr[X \leq x]$
  - $F(-\infty) = 0$
  - $F(+\infty) = 1$
  - F continua por la derecha
  - F no decreciente
  - $\Pr(X = x) = F(x) - F(x^-)$
- discreta
  - toma valores $x_1, x_2, \ldots$
  - $F(x) = \sum\{\Pr x_i : \forall i, x_i \leq x\}$
  - $E[g(X)] = \sum_{i=1} g(x_i) \cdot \Pr x_i$
- continua

- tiene función de densidad f
  - $f \geq 0$
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} f = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f$
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt$

3.3. distribuciones habituales

3.3.1. discretas

nombre	símbolo	esperanza μ	varianza σ^2
Bernoulli	$B(p)$	p	$p \cdot (1-p)$
binomial	$B(n,p)$	$n \cdot p$	$n \cdot p \cdot (1-p)$
geométrica ($X = 1, 2, \ldots$)	$G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
hipergeométrica	$H(N, D, n)$	$n\frac{D}{N}$	$n\frac{D}{N}\frac{N-D}{N}\frac{N-n}{N-1}$
Poisson	$P(\lambda)$	λ	λ

3.3.2. continuas

nombre	símbolo	esperanza μ	varianza σ^2
uniforme	$U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
exponencial	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
gama	$\gamma(p,a)$	$\frac{p}{a}$	$\frac{p}{a^2}$
gausiana	$N(\mu,\sigma)$	μ	σ^2
beta	$B(p,q)$	$\frac{p}{p+q}$	$\frac{p \cdot q}{(p+q)^2 \cdot (p+q+1)}$

- asociadas al muestreo en poblaciones gausianas
  - ji cuadrado $\chi_n^2 = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} N(0,1)$ [$N(0,1)$ independientes]
  - t de Student $t_n = \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_n^2}{n}}}$ [$N(0,1)$ y χ_n^2 independientes]
  - F de Snedecor $F_{n,m} = \frac{\frac{\chi_n^2}{n}}{\frac{\chi_m^2}{m}}$ [χ^2 independientes]

4. Inferencia

- población X
- muestra aleatoria $\vec{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
- realización muestral $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$

$$X \xrightarrow{\text{muestreo}} \vec{x}$$

$$X \xleftarrow{\text{inferencia}} \vec{x}$$

4.1. enfoques

4.1.1. frecuentista

- X depende de un parámetro θ desconocido
- objetivo
  - estimar θ
  - contrastar una afirmación sobre θ
- usado en esta asignatura

4.1.2. bayesiano

- el parámetro θ es una variable aleatoria con distribución a priori $f(\theta)$
- objetivo: calcular la distribución a posteriori $f(\theta \mid \vec{x})$ a partir de $f(\vec{x} \mid \theta)$ y $f(\theta)$

4.2. muestra aleatoria simple

- observaciones independientes
- discretas: $\Pr(\vec{x}) = \Pr(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \Pr(x_i)$
- continuas: $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i)$

4.3. estadígrafo o estadístico

- función de la muestra

$$\begin{array}{rccc} T: & [X(\Omega)]^n & \to & \mathbb{R} \\ & \vec{x} & \mapsto & T(\vec{x}) \end{array}$$

- ejemplos
  - $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$
  - $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$
  - $\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

4.4. cambio de variable

- sea X de distribución conocida y $Y = g(X)$
- si g es creciente en el soporte de X, entonces
  - $F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr[g(X) \leq y] = \Pr[X \leq g^{-1}(y)] = F_X[g^{-1}(y)]$
  - $f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \frac{dg^{-1}}{dy}(y)$
- en general, con g inyectiva:
  - $f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)] \cdot \left|\frac{dg^{-1}}{dy}(y)\right|$
- si $X(\Omega) = \bigcup_i A_i$ disjunta y g inyectiva en cada A_i
  - $f_Y(y) = \sum_i f_X[g_i^{-1}(y)] \cdot \left|\frac{dg_i^{-1}}{dy}(y)\right|$ con g_i^{-1} inversa de g en A_i
- ejemplos
  - $X \hookrightarrow U(0,1) \implies -\ln X \hookrightarrow \text{Exp}(1)$
  - $X \hookrightarrow N(0,1) \implies X^2 \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \chi_1^2$
- tipificación
  - sea X tal que $E(X) = \mu$ y $V(X) = \sigma^2$
  - $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es adimensional
- X continua $\implies F_X(X) \hookrightarrow U(0,1)$

4.5. momento muestral de orden r

- absoluto o respecto al origen
  - $\overline{X^r} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^r}{n}$
- centrado o respecto a la media
  - $\overline{(X-\bar{X})^r} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^r}{n}$

4.5.1. media muestral

- momento absoluto de orden 1
- $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$
- $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$ y $V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{\sigma^2}{n}$
- $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma) \implies \bar{X} \hookrightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- TCL (teorema central del límite):
  - $\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0,1)$
  - equivalentemente, n grande $\implies \bar{X} \overset{\sim}{\hookrightarrow} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$
- $\bar{X} \xrightarrow{\text{c.s.}} \mu$ (ley fuerte de los grandes números)

4.5.2. cuasivarianza muestral

- varianza = momento centrado de orden 2
- $\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$
- $E(\hat{S}^2) = \sigma^2$
- si $X \hookrightarrow N(\mu, \sigma)$ entonces
  - $\frac{(n-1)\cdot\hat{S}^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2_{n-1}$
  - $\bar{X}$ y $\hat{S}^2$ son independientes

4.5.3. asimetría

- $A = \frac{\text{momento centrado de orden 3}}{S^3} = \frac{\sum(X_i-\bar{X})^3}{S^3}$
- $A < 0 \Rightarrow$ asimetría a la izquierda
- $A > 0 \Rightarrow$ asimetría a la derecha

4.5.4. apuntamiento o curtosis

- $K = \frac{\text{momento centrado de orden 4}}{S^4}$ − ídem de la gausiana $= \frac{\sum(X_i-\bar{X})^4}{S^4} - 3$
- $K < 0 \Rightarrow$ platicúrtica o aplanada
- $K > 0 \Rightarrow$ leptocúrtica o apuntada