Función de distribución empírica

Teorema fundamental de la estadística (Glivenco y Canteli)

Inferencia Estadística

25 de octubre de 2021

Notación.

X población; variable aleatoria $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

$X_1, ..., X_n, ...$ sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como X

$F(\cdot)$ función de distribución de X

$F_n(\cdot)$ función de distribución empírica de $X_1, ..., X_n$

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$$

Notación. $\xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}}$ *convergencia casi seguro cuando n tiende a infinito:*

$$\begin{array}{rccc} A_1, ..., A_n, ...: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^\infty \\ & \omega & \longmapsto & (a_1, ..., a_n, ...) \end{array}$$

$$\begin{aligned} A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} a \quad &\iff \quad \Pr\Big[\lim_n A_n = a\Big] = 1 \\ &\iff \quad \Pr\Big[\Big\{\omega \;\Big|\; \lim_n a_n = a\Big\}\Big] = 1 \end{aligned}$$

Función de distribución empírica

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{(-\infty, x]}(X_i)$$

$$n \cdot F_n(x) \sim \mathcal{B}(n, \Pr[X \leq x]) = \mathcal{B}(n, F(x))$$

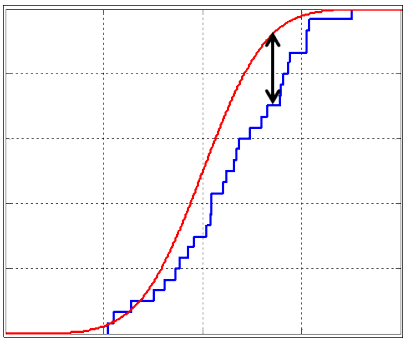
Ley fuerte de los grandes números: $\quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} F(x)$

$$\text{T.C.L.:} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{\frac{F(x)[1-F(x)]}{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Lo mismo ocurre con $F_n\big(x^-\big) = \lim_{t\to x^-} F_n(t)$ y $F(x^-) = \Pr[X < x]$.

Notación. Δ_n *distancia máxima en vertical entre dos funciones:*

$$\Delta_n = D_\infty(F_n, F) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)|$$



Funciones de distribución

```
D <- "unif"                       # norm exp ...
X <- get (paste0 ("r", D)) (10) # 100 1000 ...
F <- get (paste0 ("p", D))       # teórica
Fn <- ecdf (X)                    # empírica
plot (Fn)
plot (F, min(X), max(X), col=2, add=TRUE)
```

Distancia máxima

```
X   <- sort (X) ; n <- length (X)
Dn1 <- abs (F(X) - Fn(X))
Dn2 <- abs (F(X) - c(0,Fn(X[-n])))
i1  <- which.max (Dn1) ; i2 <- which.max (Dn2)
I   <- if (Dn1[i1] > Dn2[i2]) 1 else 2
i   <- c(i1,i2)[I] ; Xi <- X[i]
Yi  <- c (Fn(Xi), c(0,Fn(X))[i]) [I]
arrows (Xi, F(Xi), Xi, Yi, code=3, col=3)
```

Teorema (fundamental de la estadística o de Glivenco y Canteli)**.**

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

Lema. *Sean* $A_1, A_2, \dots$ *sucesos con* $\Pr[A_i] = 1\,\forall i$
Entonces $\Pr[\bigcap_i A_i] = 1$.

Demostración.

$$\Pr\left[\bigcap_i A_i\right] = 1 - \Pr\left[\bigcup_i A_i^c\right] \geq 1 - \sum_i \Pr[A_i^c] = 1 - \sum_i 0 = 1$$

Teorema (fundamental de la estadística o de Glivenco y Canteli)**.**

$$\Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{c.s.} 0$$

Demostración. Veremos dos situaciones:

1. variable discreta con número finito de valores
2. caso general

En cada situación se consideran

- sucesión de variables $(X_1, \dots, X_n, \dots)$
- sucesión particular $\omega = (x_1, \dots, x_n, \dots)$

Caso discreto finito
X toma valores x_j, $j \in \{1, \ldots, k\}$, con $x_j < x_{j+1}$.

$$F \text{ y } F_n \text{ escalonadas } \implies \Delta_n(\omega) = \max_j |F_n(x_j, \omega) - F(x_j)|$$

$\forall\, j$, sea $A_j = \{\omega \mid \lim F_n(x_j, \omega) = F(x_j)\}$. Sea $A = \bigcap_{j=1}^{k} A_j$.

$$F_n(x_j) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} F(x_j) \implies \Pr[A_j] = 1 \implies \Pr[A] = 1$$

$$\omega \in A \implies \omega \in A_j \implies \forall\, \epsilon\, \exists\, n_{j,\epsilon}\, \forall\, n > n_{j,\epsilon}, |F_n(x_j, \omega) - F(x_j)| < \epsilon$$

$$\omega \in A \implies \forall\, \epsilon\, \exists\, n_\epsilon = \max_{j=1}^{n} n_{j,\epsilon}\, \forall\, n > n_\epsilon, \Delta_n(\omega) < \epsilon$$

$$\implies \Pr[\lim \Delta_n = 0] = 1 \implies \Delta_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} 0$$

Caso general
Sea $k \in \mathbb{N}$ y considérense los cuantiles

$$x_{k,j} = \text{ínf}\left\{ x \;\middle|\; F(x) \geq \frac{j}{k} \right\} \qquad j = 1, ..., k$$

Sabemos que $\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \forall\, 1 \leq j \leq k$

$$F_n(x_{k,j}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} F(x_{k,j}) \qquad \text{y} \qquad F_n\left(x_{k,j}^-\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{c.s.}} F\left(x_{k,j}^-\right)$$

Sean

$$A_{k,j} = \{\omega \mid \lim F_n(x_{k,j}, \omega) = F(x_{k,j})\}$$

$$B_{k,j} = \left\{\omega \;\middle|\; \lim F_n\left(x_{k,j}^-, \omega\right) = F\left(x_{k,j}^-\right)\right\}$$

$$C_k = \bigcap_{j=1}^{k} A_{k,j} \cap B_{k,j} \qquad C = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$$

Entonces

$$\forall\, k\, \forall\, j,\, \Pr[A_{k,j}] = \Pr[B_{k,j}] = \Pr[C_k] = \Pr[C] = 1$$

Para cada $\omega = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Omega$ sea F_n la función de distribución empírica asociada a $(x_1, \ldots, x_n)$ y sea

$$\delta_n^k = \max_j \left\{ |F_n(x_{k,j}) - F(x_{k,j})|, \left| F_n\left(x_{k,j}^-\right) - F\left(x_{k,j}^-\right) \right| \right\}$$

luego

$$\forall\, \omega \in C,\, \lim_{n\to\infty} \delta_n^k = 0$$

Si $x \in [x_{k,j}, x_{k,j+1})$ entonces

$$\begin{aligned} F_n(x_{k,j}) \quad &\leq F_n(x) \leq \quad F_n\left(x_{k,j+1}^-\right) \\ \frac{j}{k} \leq F(x_{k,j}) \quad &\leq F(x) \leq \quad F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq \frac{j+1}{k} \end{aligned}$$

luego

$$F_n(x_{k,j}) - F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq F_n(x) - F(x) \leq F_n\left(x_{k,j+1}^-\right) - F(x_{k,j})$$

$$F_n(x_{k,j}) - F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq F_n(x) - F(x) \leq F_n\left(x_{k,j+1}^-\right) - F(x_{k,j})$$

$$\frac{j}{k} \leq F(x_{k,j}) \leq F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq \frac{j+1}{k} \implies F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq F(x_{k,j}) + \frac{1}{k}$$

entonces

$$F_n\left(x_{k,j+1}^-\right) - F(x_{k,j}) \leq F_n\left(x_{k,j+1}^-\right) + \frac{1}{k} - F\left(x_{k,j+1}^-\right) \leq \delta_n^k + \frac{1}{k}$$

$$F_n(x_{k,j}) - F\left(x_{k,j+1}^-\right) \geq F_n(x_{k,j}) - F(x_{k,j}) - \frac{1}{k} \geq -\delta_n^k - \frac{1}{k}$$

$$-\delta_n^k - \frac{1}{k} \leq F_n(x) - F(x) \leq \delta_n^k + \frac{1}{k}$$

Por tanto, $\forall\, k \in \mathbb{N}\, \forall\, j \in \{1, \ldots, k-1\}\, \forall\, x \in [x_{k,j}, x_{k,j+1})$

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \delta_n^k + \frac{1}{k}$$

Queda ver qué ocurre en los extremos,

- $x < x_{k,1}$
- $x \geq x_{k,k}$

Si $x < x_{k,1}$ entonces $F\left(x_{k,1}^-\right) \leq \frac{1}{k}$ y

$$\left.\begin{array}{rll} 0 \leq & F_n(x) & \leq F_n\left(x_{k,1}^-\right) \\ 0 \leq & F(x) & \leq F\left(x_{k,1}^-\right) \end{array}\right\} \implies -F\left(x_{k,1}^-\right) \leq F_n(x) - F(x) \leq F_n\left(x_{k,1}^-\right)$$

Por definición de δ_n^k,

$$F_n\left(x_{k,1}^-\right) \leq F\left(x_{k,1}^-\right) + \delta_n^k \leq \frac{1}{k} + \delta_n^k$$

$$-F\left(x_{k,1}^-\right) \geq -\frac{1}{k} \geq -\frac{1}{k} - \delta_n^k$$

$$\implies |F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{k} + \delta_n^k$$

Si $x \geq x_{k,k}$ entonces $F(x_{k,k}) = 1$ y $F_n(x_{k,k}) = 1$,
luego $|F_n(x) - F(x)| = |1 - 1| = 0$.

Por tanto, $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|F_n(x) - F(x)| \leq \frac{1}{k} + \delta_n^k$$

luego $\forall\, \omega \in C$

$$\Delta_n(\omega) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x, \omega) - F(x)| \leq \frac{1}{k} + \delta_n^k$$

y

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n^k = 0$$

Para todo $\omega \in C$

$$0 \leq \lim_{n \to \infty} \Delta_n(\omega) \leq \lim_n \frac{1}{k} + \delta_n^k = \frac{1}{k} + \lim_n \delta_n^k = \frac{1}{k}$$

Como eso se verifica $\forall\, k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} \Delta_n(\omega) = 0 \quad \forall\, \omega \in C$$

y como $\Pr[C] = 1$ entonces

$$\Delta_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{c.s.}} 0$$

Interpretación

- $F(x)$ está dentro de la banda $F_n(x) \pm \epsilon$ con probabilidad 1.
- Se puede estimar F con precisión arbitraria siempre que se disponga de suficiente tamaño muestral.