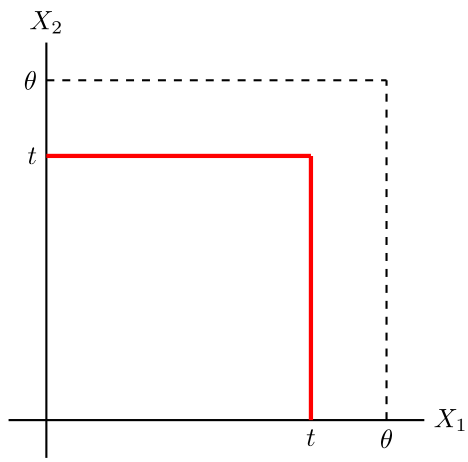
Considérese una muestra de tamaño 2 de la población $X \equiv U(0,\theta]$. Entonces

$$L_\theta(x_1, x_2 \mid X_{(2)} = t) = \frac{L_\theta(x_1, x_2)}{L_\theta(t)} = \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^2}{2 \cdot \frac{1}{\theta^2} \cdot t} = \frac{1}{2\,t}$$

con $0 < x_1 \leq x_2 = t \,\cup\, 0 < x_2 \leq x_1 = t$.

El soporte de la variable condicionada aparece en color rojo en la siguiente gráfica.



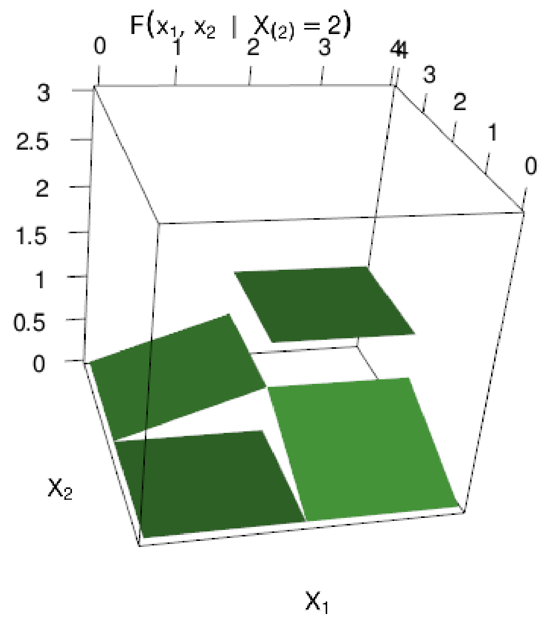
En consecuencia, la variable condicionada $(X_1, X_2 \mid X_{(2)} = t)$ es bidimensional, pero su soporte se reduce a dos segmentos de recta.

La función de distribución conjunta de $\big((X_1, X_2) \mid X_{(2)} = t\big)$ es

$$\begin{aligned} F\big((x_1, t) \mid X_{(2)} = t\big) &= \int_0^{x_1} \frac{1}{2\,t} du = \frac{x_1}{2\,t} \qquad 0 < x_1 < t \\ F\big((t, x_2)) \mid X_{(2)} = t\big) &= \int_0^{x_2} \frac{1}{2\,t} dv = \frac{x_2}{2\,t} \qquad 0 < x_2 < t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\big((t,t) \mid X_{(2)} = t\big) &= P[(X_1 \leq t,\ X_2 \leq t) \mid X_{(2)} = t] \\ &= P[(X_1 \leq t,\ X_2 = t) \cup (X_1 = t,\ X_2 < t)] \\ &= P(X_1 \leq t,\ X_2 = t) + P(X_1 = t,\ X_2 < t) \\ &= \frac{1}{2} + \lim_{x_2 \to t^-} \frac{x_2}{2\,t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Se puede hacer una representación tridimensional, por ejemplo en R:




```
t <- 2
F <- function (x1, x2) # F(x1,x2|x(2)=t)
{
    if (x1 < t && x2 < t) 0
    else if (x1 >= t && x2 >= t) 1
    else if (x1 < t && x2 >= t) x1/2/t
    else x2/2/t # x2 < t && x1 >= t
}
library(rgl)          # permite girar la gráfica con el ratón
z <- function (x, y) outer (x, y, Vectorize(F))
del <- 0.1
xn <- yn <- seq (0, 4, del)
zn <- z (xn, yn)
## coordenadas, etiquetas y tipo ("n" => dibuja sólo los ejes)
plot3d(xn,yn,zn, zlim=c(0,3),
       expression(X[1]), expression(X[2]),
       "",
       "n",
       main = expression(F(x[1],x[2]~~"|"~~X[(2)]==2)))
placa <- function (xmin, xmax, ymin, ymax)
{
    xi <- seq (xmin, xmax, len=2)
    yi <- seq (ymin, ymax, len=2)
    zi <- z (xi, yi)
    surface3d (xi, yi, zi, col=3)
```

```
}
eps <- 0.0001
placa (t, 4, t, 4)
placa (0, t-eps, 0, t-eps)
placa (0, t-eps, t, 4)
placa (t, 4, 0, t-eps)
```

Vamos a calcular la marginal $X_1 \mid X_{(2)} = t$. Para $x_1 < t$ se tiene:

$$f_{(X_1|X_{(2)}=t)}(x_1) = \frac{f(x_1, x_{(2)}{=}t)}{f_{X_{(2)}}(t)} = \frac{f(x_1, t)}{f_{X_{(2)}}(t)} = \frac{\frac{1}{\theta^2}}{2 \cdot \frac{1}{\theta^2} \cdot t} = \frac{1}{2\,t}$$

$$F_{(X_1|X_{(2)}=t)}(x_1) = \frac{x_1}{2\,t} \qquad 0 < x_1 < t$$

$$F_{(X_1|X_{(2)}=t)}(t^-) = \lim_{x_1 \to t^-} F_{(X_1|X_{(2)}=t)}(x_1) = \lim_{x_1 \to t^-} \frac{x_1}{2\,t} = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$P(X_1 = t \mid X_{(2)} = t) = \frac{1}{2}$$

La variable condicionada $X_1 \mid X_{(2)} = t$ es una variable mixta porque tiene una parte discreta y una continua.

$$f_{(X_1|X_{(2)}=t)}(x_1) = \frac{1}{2\,t}[0 < x_1 < t] + \frac{1}{2}\delta(x_1 - t)$$

donde δ es la delta de Dirac:

$$\delta(x - t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq t \\ +\infty & \text{si } x = t \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - t) \cdot dx = 1$$