Familia exponencial

Inferencia Estadística

7 de noviembre de 2022

1. Implica soporte independiente del parámetro

Sea X perteneciente a la familia exponencial k-paramétrica. Entonces

$$f_X(x,\vec{\theta}) = c(\vec{\theta})h(x)e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\vec{\theta})T_j(x)}$$

Si el soporte de X dependiese de $\vec{\theta}$, entonces existirían $\vec{\theta}_1$, $\vec{\theta}_2$, x_1 y x_2 tales que

$$f_X(x_1,\vec{\theta}_1) > 0 \qquad f_X(x_2,\vec{\theta}_2) > 0 \qquad f_X(x_2,\vec{\theta}_1) = 0$$

luego

$$\begin{aligned} 0 < f_X(x_1,\vec{\theta}_1) = c(\vec{\theta}_1)h(x_1)e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\vec{\theta}_1)T_j(x_1)} \quad &\Longrightarrow \quad c(\vec{\theta}_1) > 0 \\ 0 < f_X(x_2,\vec{\theta}_2) = c(\vec{\theta}_2)h(x_2)e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\vec{\theta}_2)T_j(x_2)} \quad &\Longrightarrow \quad h(x_2) > 0 \end{aligned}$$

pero se produciría una contradicción:

$$0 = f_X(x_2,\vec{\theta}_1) = \underbrace{c(\vec{\theta}_1)}_{>0}\underbrace{h(x_2)}_{>0}\underbrace{e^{\sum_{j=1}^{k} Q_j(\vec{\theta}_1)T_j(x_2)}}_{>0}$$

2. Familias no exponenciales con soporte independiente del parámetro

Para ver que una familia no es exponencial uniparamétrica, hay que comprobar que no pueden existir Q y T tales que

$$f_X(x,\theta) = c(\theta)h(x)e^{Q(\theta)T(x)}$$

Considérese el cociente de los exponentes de las densidades de dos observaciones distintas x y y

$$\frac{Q(\theta)T(x)}{Q(\theta)T(y)} = \frac{T(x)}{T(y)}$$

Dicho cociente sería independiente de θ si la densidad perteneciese a la familia exponencial.

2.1. Distribución $\frac{\theta+2x}{\theta+1}$

Sea la densidad definida en el intervalo $x \in [0, 1]$ con el parámetro $\theta \in [0, \infty)$

$$f(x, \theta) = \frac{\theta + 2x}{\theta + 1} = \frac{1}{\theta + 1} e^{\ln(\theta+2x)} \stackrel{?}{=} \frac{1}{\theta + 1} e^{Q(\theta)T(x)}$$

El cociente de los exponentes sería

$$\frac{\ln(\theta + 2x)}{\ln(\theta + 2y)}$$

que depende de θ salvo si $x = y$.

2.2. Distribución de Laplace

La distribución laplaciana o doble exponencial con parámetro de localización $\theta \in R$ tiene densidad para todo $x \in R$

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{|x-\theta|}$$

En este caso, el cociente de exponentes es

$$\frac{|x - \theta|}{|y - \theta|}$$

que depende de θ salvo si $x = y$.

2.3. Distribución de Cauchy

La distribución de Cauchy con parámetro de localización $\theta \in R$ tiene densidad para todo $x \in R$

$$f(x) = \frac{1}{\pi \left[1 + (x - \theta)^2\right]} = e^{\ln\left(\frac{1}{\pi\left[1+(x-\theta)^2\right]}\right)} = e^{-\ln\left(\pi\left[1+(x-\theta)^2\right]\right)}$$

El cociente de exponentes es

$$\frac{\ln\left(\pi\left[1+(x-\theta)^2\right]\right)}{\ln\left(\pi\left[1+(y-\theta)^2\right]\right)}$$

que para, por ejemplo, $x=1$ y $y=0$, vale

$$C(\theta)=\frac{\ln\left(\pi\left[1+(1-\theta)^2\right]\right)}{\ln\left(\pi\left[1+\theta^2\right]\right)}$$

que depende de θ, pues $C(\theta=0)=\frac{\ln(2\pi)}{\ln\pi}\neq\frac{\ln\pi}{\ln(2\pi)}=C(\theta=1)$.