Inferencia Estadística

Contrastes de hipótesis

M.T. López, N. Corral, C. Carleos

Departamento de Estadística — Universidad de Oviedo

3 de febrero de 2025

Definiciones

Hipótesi

Afirmación que se pretende validar o desmentir.

Hipótesi estadística

Hipótesi sobre la distribución de una variable aleatoria:

- sobre algún parámetro del que dependa;
- sobre la familia a la que pertenece;
- sobre su relación con otra variable.

Ejemplos

- La altura media de los varones asturianos de 15 años es 1,67 m.
- La proporción de afectados por la gripe este otoño es 0,25.
- Tiempo dedicado a estudiar es independiente del dedicado a ver TV.
- Un reactivo emite partículas según una distribución de Poisson.

Definiciones

Hipótesi paramétrica

Si hace referencia a algún parámetro de la distribución.

Hipótesi simple

Si especifica totalmente la distribución.

Hipótesi compuesta

Si no especifica totalmente la distribución.

Ejemplo

Sea $X \equiv B(p)$

$$\begin{array}{ll} H \equiv p = 0{,}5 & \text{es una hipótesi paramétrica simple} \\ H \equiv p \neq 0{,}25 & \text{es hipótesi paramétrica compuesta} \end{array}$$

Definiciones

Hipótesi paramétrica

Si hace referencia a algún parámetro de la distribución.

Hipótesi simple

Si especifica totalmente la distribución.

Hipótesi compuesta

Si no especifica totalmente la distribución.

Ejemplo

Sea $X \equiv N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida.

$H \equiv \mu = 3$	es una hipótesi paramétrica compuesta
$H \equiv \mu = 7, \sigma = 2$	es una hipótesi paramétrica simple

Definiciones

Hipótesi nula (H_0)

Hipótesi de referencia, de partida: *En caso de duda, hipótesi nula.*

Hipótesi alternativa (H_1)

Hipótesi contraria a H_0.

Ejemplo

Un fabricante desea saber si un nuevo procedimiento de producción presenta más estabilidad en el peso del producto que fabrica que el utilizado actualmente. Para ello formulará las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \text{la estabilidad del peso no mejora} \\ H_1 &\equiv \text{la estabilidad del peso mejora} \end{aligned}$$

o, en contexto estadístico: $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2$ frente a $H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$.

Asimetría entre H_0 y H_1

Procedimiento

- No se elige meramente la hipótesi más verosímil.
- ¿Hay evidencias suficientes para rechazar H_0?
- Presunción de inocencia: $H_0 \equiv$ inocente, $H_1 \equiv$ culpable.

H_0

- Se rechaza sólo si se observa una gran evidencia en contra.
- Nunca se concluye que sea cierta,
  sino que no hay evidencias para rechazarla.

H_1

- Si se rechaza H_0 se obtiene un resultado *significativo*.

Definiciones

Contraste de hipótesis

Partición medible del espacio muestral en dos regiones:

región de aceptación (R.A.) asociada a H_0.

región crítica (R.C.) asociada a H_1.

Función test

Indicatriz de la región crítica:

$$\begin{aligned} \varphi : X(\Omega)^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{x} &\longmapsto \varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in \text{R.C.} \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \text{R.A.} \end{cases} \end{aligned}$$

Definiciones

Cuatro situaciones posibles: decisión

estado de la naturaleza (realidad)		No rechazar H_0	Rechazar H_0
	H_0 cierta	acierto	error I
	H_0 falsa	error II	acierto

Ejemplo

Sea el contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2 \quad H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$.
Consideramos R.C. $= \left[\hat{S}^2 < 0{,}15\right]$ y R.A. $= \left[\hat{S}^2 \geq 0{,}15\right]$.
Si $\sigma^2 = 0{,}2$ pero $\hat{S}^2 = 0{,}13$, cometemos error I.
Si $\sigma^2 = 0{,}1$ pero $\hat{S}^2 = 0{,}16$, cometemos error II.

Definiciones

Cuatro situaciones posibles:

		decisión	
		No rechazar H_0	Rechazar H_0
estado de la naturaleza (realidad)	H_0 cierta	acierto	error I
	H_0 falsa	error II	acierto

Sea el contraste $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0$, $H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$.

Probabilidad de error de tipo I

Probabilidad de rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_0$: $P\left(\text{R.C.} \mid \theta\right) = E_\theta(\varphi)$

Definiciones

Cuatro situaciones posibles: decisión

estado de la naturaleza (realidad)		No rechazar H_0	Rechazar H_0
	H_0 cierta	acierto	error I
	H_0 falsa	error II	acierto

Sea el contraste $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0, H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$.

Probabilidad de error de tipo I

Probabilidad de rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_0$: $P\left(\text{R.C.} \mid \theta\right) = E_\theta(\varphi)$

Probabilidad de error de tipo II

Prob. de no rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_1$: $P\left(\text{R.A.} \mid \theta\right) = 1 - E_\theta(\varphi)$

Definiciones

Cuatro situaciones posibles: decisión

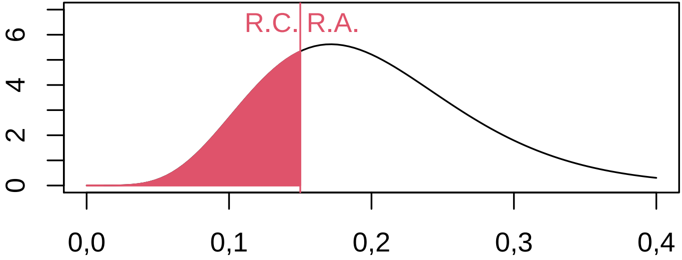
estado de la naturaleza (realidad)		No rechazar H_0	Rechazar H_0
	H_0 cierta	acierto	error I
	H_0 falsa	error II	acierto

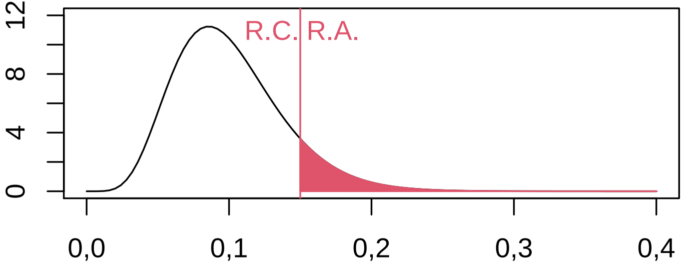
Sea el contraste $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0, H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$.

Ejemplo

Supóngase $X \equiv N(\mu, \sigma)$ y $n = 15$.
Sea el contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2 \quad H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$.
Consideramos R.C. $= \left[\hat{S}^2 < 0{,}15\right]$ y R.A. $= \left[\hat{S}^2 \geq 0{,}15\right]$.
Si $\sigma^2 = 0{,}2$, $P\left(\text{error I}\right) = P\left(\chi^2_{14} < \frac{14 \cdot 0{,}15}{0{,}2}\right) \approx 0{,}275$.
Si $\sigma^2 = 0{,}1$, $P\left(\text{error II}\right) = P\left(\chi^2_{14} \geq \frac{14 \cdot 0{,}15}{0{,}1}\right) \approx 0{,}102$.

Ejemplo: densidades de $\hat{S}^2$ bajo H_0 y H_1





Procedimiento habitual para buscar la región crítica

1. Fijar el *nivel de significación*

Se trata de una cota para la probabilidad de error de tipo I.
Se representa por α.
Para un contraste $H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$ se tiene pues

$$\forall\, \theta \in \Theta_0 \qquad P\,(\text{error I}) = P\,(\text{R.C.} \mid \theta) \leq \alpha$$

2. Minimizar la probabilidad de error II

Entre los contrastes que cumplan el nivel de significación se busca aquel contraste que hace mínima la probabilidad de error de tipo II.

Procedimiento habitual para buscar la región crítica

Consecuencias

- Criterio muy conservador respecto a H_0.
- α es un valor pequeño fijado por el investigador, como 0,05 ó 0,01.
- α es cota superior para la probabilidad de error I,
luego está asociado a la región crítica y a H_0.
- Un resultado muestral es *significativo* al nivel α si está en la R.C.

Metodología

1. Formular las hipótesis del estudio.
2. Traducirlas a la terminología estadística.
3. Fijar el nivel de significación, α.
4. Construir la R.C.
5. Seleccionar la muestra $\vec{x}$.
6. Rechazar H_0 si $\vec{x} \in$ R.C.

Metodología

Construcción de un buena R.C.

- Se construye antes de analizar los resultados experimentales.
- $\vec{x} \in$ R.C. en caso de que $P(\vec{x} \mid H_0) \ll P(\vec{x} \mid H_1)$.
- Se expresa en función del *estadístico del contraste*, que mide las discrepancias de $\vec{x}$ respecto a H_0.
- La distribución bajo H_0 del estadístico del contraste ha de ser conocida para garantizar el nivel de significación.
- Tiene en cuenta H_1 para que el contraste tenga poca probabilidad de error de tipo II.

Ejemplo (continuación)

- X = peso de piezas $\equiv N(\mu, \sigma)$
- contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2$, $H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$
- nivel de significación $\alpha = 0{,}05$
- tamaño muestral $n = 15$
- estimador de σ^2: $\hat{S}^2$
- región crítica intuitiva:

$$\text{R.C.} = \left\{ (x_1, \cdots, x_{15}) \;\middle|\; \hat{S}^2 < c \right\}$$

Ejemplo (continuación)

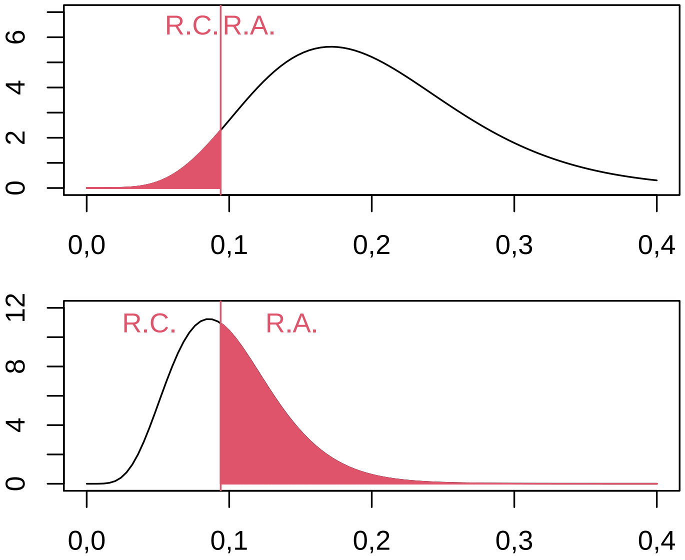
- Cálculo de c:

$$\begin{aligned}
P\left(\text{R.C.} \mid H_0\right) &= P\left(\hat{S}^2 < c \mid H_0\right) \\
&= P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \,\middle|\, H_0\right) = \\
&= P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \,\middle|\, \sigma^2 \geq 0{,}2\right) \\
&\leq P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)c}{0{,}2}\right)
\end{aligned}$$

Tomando $F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{(n-1)c}{0{,}2}\right) = \alpha$ entonces $c = \frac{0{,}2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$.

En este caso, R.C. = $\left\{\vec{x} \,\middle|\, \hat{S}^2 < \frac{0{,}2}{14} F^{-1}_{\chi^2_{14}}(0{,}05)\right\} = \left\{\vec{x} \mid \hat{S}^2 < 0{,}094\right\}$.

Ejemplo: densidades de $\hat{S}^2$ bajo H_0 y H_1



Definiciones

Contraste unilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por una cola de la distribución del estadístico de contraste.

Contraste bilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por las dos colas de la distribución del estadístico de contraste.

Función de potencia

Es la función $\mathrm{Pot}(\theta)$ que devuelve la probabilidad de rechazar H_0 cuando el parámetro es θ, es decir, $\mathrm{Pot}(\theta) = P\left(\mathrm{R.C.} \mid \theta\right) = E_\theta(\varphi)$.

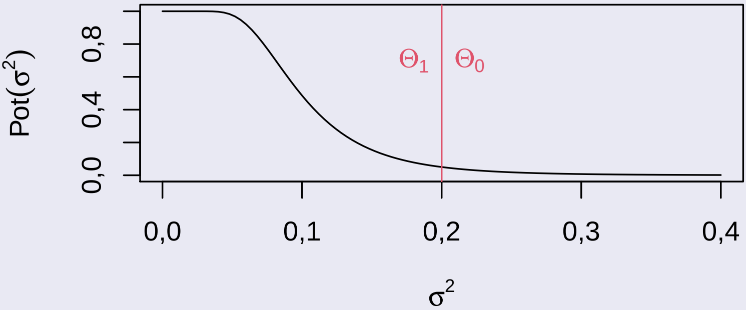
Tamaño de un test

Es la mayor potencia bajo H_0, es decir, $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathrm{Pot}(\theta)$.

Ejemplo

contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2$, $H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$

- Se trata de un contraste unilateral.
- $X \equiv N(\mu, \sigma)$, $n = 15$, $\alpha = 0{,}05 \implies$ R.C. = $\left\{\vec{x} \mid \hat{S}^2 < 0{,}094\right\}$
- $\text{Pot}(\sigma^2) = P\left(\text{R.C.} \mid \sigma^2\right) = P\left(\hat{S}^2 < 0{,}094 \mid \sigma^2\right) = P\left(\chi^2_{14} < \frac{14 \cdot 0{,}094}{\sigma^2}\right)$



Definiciones

Contraste uniformemente más potente

- Sean dos contrastes φ y φ'.
- Nivel de significación α
- Hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \in \Theta_1$

φ es *uniformemente más potente* que φ' si

$$\mathrm{Pot}_{\varphi}(\theta) \geq \mathrm{Pot}_{\varphi'}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

Definiciones

El contraste más potente

- Sean las hipótesis $H_0 : \theta \in \Theta_0$ y $H_1 : \theta \in \Theta_1$.
- Sea Φ_α la clase de todos los contrastes a nivel α para contrastarlas.

Un test φ_0 se dice que es *el más potente* para un cierto $\theta_1 \in \Theta_1$ cuando

$$\mathrm{Pot}_{\varphi_0}(\theta_1) \geq \mathrm{Pot}_{\varphi}(\theta_1) \quad \forall \varphi \in \Phi_\alpha$$

El contraste uniformemente más potente

φ_0 es *el uniformemente más potente* si

$$\mathrm{Pot}_{\varphi_0}(\theta) \geq \mathrm{Pot}_{\varphi}(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1 \quad \forall \varphi \in \Phi_\alpha$$

Ejemplo para comparar dos contrastes

Población: $X \equiv N(\mu, \sigma = 1)$

```
n <- 25; sigma <- 1; alfa <- 0.05
mu0 <- 5; mu1 <- 5.3 # hipótesis
```

Contraste 1: $\mathrm{RC}_1 = [\bar{x} > k_1]$

```
k1 <- qnorm (1-alfa, mu0, sigma/sqrt(n))
p1 <- 1 - pnorm (k1, mu1, sigma/sqrt(n)) # potencia
```

Contraste 2: $\mathrm{RC}_2 = [\mathrm{mediana}(\vec{x}) > k_2]$

```
nr <- 1e5 # número de repeticiones de Montecarlo
medianas <- replicate (nr, median (rnorm (n, mu0, sigma)))
k2 <- quantile (medianas, 1-alfa, names=FALSE)
p2 <- mean (replicate (nr, median (rnorm (n, mu1, sigma)))
            > k2)
```

Ejemplo para comparar dos contrastes

Resultado

```
> k1           # frontera de RC1 = [media > k1]
[1] 5.328971
> k2           # frontera de RC2 = [mediana > k2]
[1] 5.407272
> p1           # potencia de contraste 1
[1] 0.4424132
> p2           # potencia de contraste 2
[1] 0.33336
```

Ejemplo para comparar dos contrastes

Población: $X \equiv N(\mu, \sigma = 1)$

```
n <- 25; sigma <- 1; alfa <- 0.05
mu0 <- 5; mu1 <- 5.3 # hipótesis
```

Otra forma de expresar la RC_1

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma : \sqrt{n}} \overset{H_0}{\equiv} N(0, 1)$$

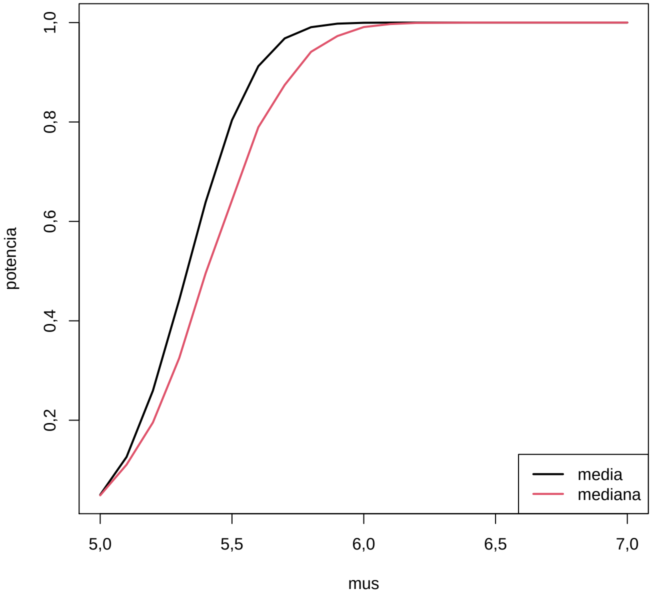
$$RC_1 = \left[\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma : \sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \right]$$

```
z1menosAlfa <- qnorm (1-alfa) # 1,644854
## potencia:
p1 <- 1 - pnorm (z1menosAlfa, (mu1-mu0)/sigma*sqrt(n))
```

Ejemplo para comparar dos contrastes

$H_0: \mu = 5 \quad H_1: \mu > 5$

```
n <- 25; sigma <- 1; alfa <- 0.05
mu0 <- 5
potencias <- function (mu1, nr=1e4)
{
    k1 <- qnorm (1-alfa, mu0, sigma/sqrt(n))
    p1 <- 1 - pnorm (k1, mu1, sigma/sqrt(n))
    medianas <- replicate (nr, median (rnorm (n, mu0, sigma)))
    k2 <- quantile (medianas, 1-alfa, names=FALSE)
    p2 <- mean (replicate (nr, median (rnorm (n, mu1, sigma)))
                > k2)
    c (p1, p2)
}
mus <- seq (5, 7, .1)
ps <- sapply (mu1s, potencias)
plot  (mus, ps[1,], type="l", lwd=2, ylab="potencia")
lines (mus, ps[2,], col=2,    lwd=2)
legend ("bottomright", c("media","mediana"), col=1:2, lwd=2)
```


potencia
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
5,0
5,5
6,0
6,5
7,0
mus
media
mediana

Definiciones

Nivel crítico o P-valor

- Dada una realización muestral $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, es el menor nivel de significación α para el que se rechaza H_0.
- Probabilidad, bajo H_0, de obtener una muestra más "rara" que $\vec{x}$. (En realidad, al menos tan "rara" como $\vec{x}$.)

Uso del P-valor

- Se calcula después de tener los datos muestrales $\vec{x}$.
- Mide la "compatibilidad" de $\vec{x}$ con H_0.
- P-valor alto $\implies p > \alpha \implies$ no se rechaza H_0.
- P-valor bajo $\implies p \leq \alpha \implies$ se rechaza H_0. (Resultado significativo a nivel α.)

Ejemplo para calcular P-valor

Población: $X \equiv N(\mu, \sigma = 1)$

- hipótesis: $H_0 : \mu = 5, \quad H_1 : \mu > 5$
- $n = 25, \quad \alpha = 0{,}05$
- RC = $[\bar{x} > k]$
- $\alpha = 0{,}05 = P\left[\text{RC} \mid H_0\right] = P\left[N\left(5, \frac{1}{\sqrt{25}}\right) > k\right]$

```
n <- 25; sigma <- 1; alfa <- 0.05; mu0 <- 5
k <- qnorm (1-alfa, mu0, sigma/sqrt(n)) # k=5.328971
```

- Sean dos muestras con medias muestrales $\bar{x} = 5{,}4$ y $\bar{x} = 10$.

```
pv1 <- 1 - pnorm (5.4, mu0, sigma/sqrt(n)) # pv1=0.02275013
pv2 <- 1 - pnorm ( 10, mu0, sigma/sqrt(n)) # pv2=0
```

Ejemplo para calcular P-valor

Población: $X \equiv N(\mu, \sigma = 1)$

- hipótesis: $H_0: \mu = 5, \quad H_1: \mu \neq 5$
- $n = 25, \quad \alpha = 0{,}05$
- RC = $[|\bar{x} - 5| > k]$ $\qquad \bar{X} - 5 \overset{H_0}{\equiv} N\left(0, \frac{1}{\sqrt{25}}\right)$
- $\alpha = 0{,}05 = P\left[\text{RC} \mid H_0\right] = P\left[\left|N\left(0, \frac{1}{\sqrt{25}}\right)\right| > k\right]$

```
n <- 25; sigma <- 1; alfa <- 0.05; mu0 <- 5
k <- qnorm (1-alfa/2, 0, sigma/sqrt(n)) # 0.3919928
```

- Sea una muestra con media muestral $\bar{x} = 5{,}4$.

```
pv <- 2 * (1 - pnorm (5.4-mu0, , sigma/sqrt(n))) # pv=0.0455
```

P-valor como variable aleatoria

Proposición

Si

- H_0 es simple,
- T, el estadístico del contraste, es continuo, y
- la R.C. puede expresarse como $\{\vec{x} \mid T(\vec{x}) > c\}$,

entonces el P-valor P_V sigue una distribución uniforme, $P_V \overset{H_0}{\equiv} U(0,1)$.

Demostración

Para cada muestra $\vec{x}$, sea $t = T(\vec{x})$. Entonces el P-valor es

$$P_V(\vec{x}) = P[T > t \mid H_0] = 1 - P[T \leq t \mid H_0] = 1 - P[T \leq T(\vec{x}) \mid H_0] = 1 - F_T\big(T(\vec{x})\big)$$

$$F_T(T) \equiv U(0,1) \implies 1 - F_T(T) \equiv U(0,1) \implies P_V \equiv U(0,1)$$

P-valor como variable aleatoria

Proposición

...el P-valor P_V sigue una distribución uniforme, $P_V \overset{H_0}{\equiv} U(0,1)$.

Demostración con más detalle

$$F_0(t) = P\left[T \leq t \mid H_0\right]$$

$$F_0(T) = F_0[T(\vec{X})] \overset{H_0}{\equiv} U(0,1)$$

$$\begin{array}{rccl} P_V: & X(\Omega)^n & \longrightarrow & [0;1] \\ & \vec{x} & \longmapsto & p_v = P[T > T(\vec{x}) \mid H_0] = 1 - F_0[T(\vec{x})] \end{array}$$

$$\begin{aligned} P[P_V \leq a \mid H_0] &= P\Big[1 - F_0[T(\vec{X})] \leq a \mid H_0\Big] = P\Big[F_0[T(\vec{X})] \geq 1 - a \mid H_0\Big] \\ &= P[U(0,1) \geq 1 - a] = 1 - P[U(0,1) < 1 - a] \\ &= 1 - (1 - a) = a \implies P_V \overset{H_0}{\equiv} U(0,1) \end{aligned}$$

P-valor como variable aleatoria

Interpretación

- Bajo H_0, dado un nivel de significación $\alpha \in (0; 1)$,

$$F_{\text{P-valor}|H_0}(\alpha) = P_{H_0}(\text{P-valor} \leq \alpha) = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ cierta}) = \alpha$$

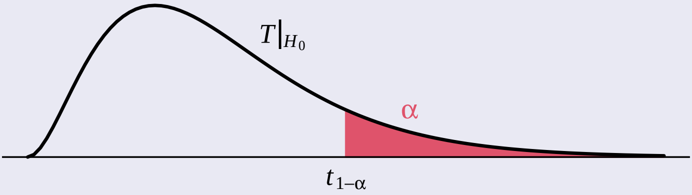
$$\Longrightarrow \text{P-valor} \equiv U(0, 1)$$

- Por tanto, bajo H_0 pueden aparecer P-valores pequeños.
- Pero bajo H_1 esos P-valores pequeños son mucho más problables.
- Por eso se rechaza H_0 si la muestra produce un P-valor pequeño.

P-valor como variable aleatoria

Interpretación

- $P_V(\vec{X}) < \alpha \iff T(\vec{X}) > t_{1-\alpha}$



- $F_{P_V(\vec{X})}(\alpha) = P[P_V(\vec{X}) < \alpha] = P[T(\vec{X}) > t_{1-\alpha}] = \alpha$

Contrastes en poblaciones gausianas, $\sigma = \sigma_0$

$H_0 : \mu = \mu_0, \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$

Estadístico de contraste: $$E = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\equiv} N(0,1)$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, |E| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \quad \text{con} \quad z_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{N(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$H_0 : \mu \leq \mu_0, \quad H_1 : \mu > \mu_0$

$$E \overset{H_0}{\equiv} N(0,1) + c \quad \text{con} \quad c = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \qquad \text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, E > z_{1-\alpha} \right\}$$

$H_0 : \mu \geq \mu_0, \quad H_1 : \mu < \mu_0$

$$E \overset{H_0}{\equiv} N(0,1) + c \quad \text{con} \quad c = \frac{\mu - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \qquad \text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, E < z_{\alpha} \right\}$$

Contrastes en poblaciones gausianas, $\sigma = \sigma_0$

$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$ en detalle

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \bar{x} > k \right\} \qquad P(\text{R.C.}) \leq \alpha \qquad \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \equiv N(0,1)$$

El valor de k se calcula en la frontera de H_0, es decir, μ_0:

$$\begin{aligned} \alpha &= P\left[\bar{X} > k \mid \mu = \mu_0\right] = P\left[\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{k - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \,\middle|\, \mu = \mu_0\right] = \\ &= P\left[N(0,1) > \frac{k - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] \end{aligned}$$

¿Qué ocurre con $P(\text{R.C.} \mid \mu)$ en el resto de μ de H_0?

$H_0: \mu \leq \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0$ en detalle

Sea $\mu < \mu_0$. Entonces

$$\begin{aligned} P\left[\bar{X} > k \mid \mu\right] &= P\left[\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{k-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \;\middle|\; \mu\right] = \\ &= P\left[N(0,1) > \frac{k-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] \\ &< P\left[N(0,1) > \frac{k-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right] = \alpha \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\forall \mu \in H_0, \quad P(\bar{X} > k \mid \mu) \leq \alpha$$

El tamaño del contraste es

$$\sup_{\mu \in H_0} P(\text{R.C.} \mid \mu) = P(\text{R.C.} \mid \mu_0) = \alpha$$

Contrastes en poblaciones gausianas, σ desconocida

$H_0: \mu = \mu_0, \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

Estadístico del contraste: $$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\hat{S}/\sqrt{n}} \overset{H_0}{\equiv} t_{n-1}$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} \right| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\} \quad \text{con} \quad t_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{t_{n-1}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Contrastes en poblaciones gausianas

$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$

$$\text{Estadístico del contraste:} \qquad \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0}{\equiv} \chi^2_{n-1}$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} < \chi_{\frac{\alpha}{2}} \right\} \bigcup \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$\chi_\alpha = F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$$

Contrastes sobre una proporción

$H_0 : p = p_0 \quad H_1 : p \neq p_0$

$$X \equiv B(1,p) \qquad \hat{p} = \bar{X}$$

Estadístico del contraste: $$\frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \overset{H_0}{\cong} N(0,1)$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{N(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Contrastes sobre la media de la distribución de Poisson

$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0$

$$\text{Estadístico del contraste:} \quad \frac{\bar{X} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 / n}} \overset{H_0}{\cong} N(0,1)$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{x} - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0 / n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = F^{-1}_{N(0,1)}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos conocidos

$$H_0: \quad \mu_X = \mu_Y \iff \mu_X - \mu_Y = 0 \qquad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

$$\text{Estadístico:} \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_X - \mu_Y)}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \equiv N(0,1)$$

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

Previamente, contraste de igualdad de varianzas:

$$H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 \quad H_1: \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

$$\text{Estadístico del contraste:} \quad \frac{\hat{S}_X^2}{\hat{S}_Y^2} \overset{H_0}{\equiv} F_{n_X-1, n_Y-1}$$

Contrastes para la comparación de medias

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

$$H_0: \quad \mu_X = \mu_Y \iff \mu_X - \mu_Y = 0 \qquad H_1: \mu_X \neq \mu_Y$$

Estadístico:

- si $\sigma_X = \sigma_Y$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}\sqrt{\frac{(n_X-1)\hat{S}_X^2 + (n_Y-1)\hat{S}_Y^2}{n_X+n_Y-2}}} \overset{H_0}{\equiv} t_{n_X+n_Y-2}$$

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}} \overset{H_0}{\cong} t_c \qquad c = \frac{\left(\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\hat{S}_X^4}{n_X^2(n_X-1)} + \frac{\hat{S}_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}$$

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}} = \frac{\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X}+\frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}}$$

numerador:

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}} \overset{H_0}{\equiv} N(0,1)$$

denominador: distribución desconocida

Contrastes para la comparación de medias

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$: aproximación de Welch-Satterthwaite

  Se busca c tal que
  $$\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} \quad \cong \quad \frac{\chi_c^2}{c}$$
  es decir, tengan misma media y varianza.

Contrastes para la comparación de medias

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$: aproximación de Welch-Satterthwaite

$$\hat{S}_X^2, \hat{S}_Y^2 \quad \text{son estimadores insesgados de} \quad \sigma_X^2, \sigma_Y^2$$

$$\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y} \quad \text{es estimador insesgado de} \quad \frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}$$

$$E\left[\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right] = \frac{\frac{E[\hat{S}_X^2]}{n_X} + \frac{E[\hat{S}_Y^2]}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = \frac{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}} = 1 = \frac{c}{c} = \frac{E[\chi_c^2]}{c} = E\left[\frac{\chi_c^2}{c}\right]$$

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$: aproximación de Welch-Satterthwaite

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \equiv \chi^2_{n-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(\hat{S}^2) = \frac{2(n-1)\sigma^4}{(n-1)^2} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{Var}\left[\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X} + \frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right] = 2\frac{\frac{\sigma_X^4}{n_X^2(n_X-1)} + \frac{\sigma_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)^2}$$

Contrastes para la comparación de medias

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$: aproximación de Welch-Satterthwaite

$$\operatorname{Var}\left[\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X}+\frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right] = 2\,\frac{\frac{\sigma_X^4}{n_X^2(n_X-1)}+\frac{\sigma_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)^2}$$

$$\operatorname{Var}\left[\frac{\frac{\hat{S}_X^2}{n_X}+\frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}}{\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}\right] = \operatorname{Var}\left[\frac{\chi_c^2}{c}\right] = \frac{2c}{c^2} = \frac{2}{c}$$

$$c = \frac{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X}+\frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\sigma_X^4}{n_X^2(n_X-1)}+\frac{\sigma_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}} \approx \frac{\left(\frac{\hat{S}_X^2}{n_X}+\frac{\hat{S}_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\hat{S}_X^4}{n_X^2(n_X-1)}+\frac{\hat{S}_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}$$

Dos poblaciones gausianas independientes, desvíos desconocidos

- si $\sigma_X \neq \sigma_Y$: aproximación de Welch-Satterthwaite

  El valor teórico de c,

$$c = \frac{\left(\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{\sigma_X^4}{n_X^2(n_X-1)} + \frac{\sigma_Y^4}{n_Y^2(n_Y-1)}} = \frac{\left(\frac{1}{n_X} + \frac{\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2}{n_Y}\right)^2}{\frac{1}{n_X^2(n_X-1)} + \frac{\left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^4}{n_Y^2(n_Y-1)}}$$

  depende de los desvíos sólo a través del cociente $\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$.

Contrastes para la comparación de dos proporciones

Dos muestras independientes

$$H_0 : p_X = p_Y \qquad H_1 : p_X \neq p_Y$$

Estadístico del contraste: $$\frac{\hat{p}_X - \hat{p}_Y}{\sqrt{\frac{\hat{p}_X(1-\hat{p}_X)}{n_X} + \frac{\hat{p}_Y(1-\hat{p}_Y)}{n_Y}}} \overset{H_0}{\cong} N(0,1)$$

Tamaño de muestra y potencia

Caso gausiano: $X \equiv N(\mu, \sigma_0)$

Calcular el mínimo tamaño de muestra n necesario para detectar una diferencia $d = |\mu_1 - \mu_0|$ con una potencia $1 - \beta$ en el contraste

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

a nivel de significación α.

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$n \geq \sigma_0^2 \frac{(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - z_\beta)^2}{d^2}$$

Caso gausiano: $X \equiv N(\mu, \sigma_0)$

Sin pérdida de generalidad, supóngase $\mu_1 = \mu_0 + d$.

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

$$1 - \beta = P\left(\text{R.C.} \mid \mu_1\right) = P\left[\left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu_1 \right] =$$

$$= P\left[\left| \frac{\bar{X} - \mu_1 + d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu_1 \right] = P\left[\left| N(0,1) + \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu_1 \right] =$$

$$= 1 - P\left[-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq N(0,1) + \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \;\middle|\; \mu_1 \right] =$$

$$= 1 - \left[\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right) - \Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right) \right]$$

Tamaño de muestra y potencia

Caso gausiano: $X \equiv N(\mu, \sigma_0)$

En consecuencia

$$\beta = \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)$$

donde

$$\Phi\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \approx 0$$

Por tanto

$$\Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \approx \beta \implies z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \frac{d}{\sigma_0/\sqrt{n}} \approx \Phi^{-1}(\beta) = z_\beta$$

$$\implies n \approx \left[\sigma_0 \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} - z_\beta}{d}\right]^2$$