

# P-valor

## Inferencia Estadística

M.T. López, N. Corral, C. Carleos

Departamento de Estadística — Universidad de Oviedo

2 de febrero de 2023

## Proposición

Si

- $H_0$  es simple,
- $T$ , el estadístico del contraste, es continuo, y
- la R.C. puede expresarse como  $\{\vec{x} \mid T(\vec{x}) > c\}$ ,

entonces el P-valor  $P_V$  sigue una distribución uniforme,  $P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$ .

## Demostración (versión 1)

Para cada muestra  $\vec{x}$ , sea  $t = T(\vec{x})$ . Entonces el P-valor es

$$P_V(\vec{x}) = P[T > t \mid H_0] = 1 - P[T \leq t \mid H_0] = 1 - P[T \leq T(\vec{x}) \mid H_0] = 1 - F_T(T(\vec{x}))$$

$$F_T(T) \equiv U(0, 1) \implies 1 - F_T(T) \equiv U(0, 1) \implies P_V \equiv U(0, 1)$$

## Proposición

...el P-valor  $P_V$  sigue una distribución uniforme,  $P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$ .

## Demostración (versión 2, con más detalle)

$$F_0(t) = 1 - P[T \leq t \mid H_0]$$

$$F_0(T) = F_0[T(\vec{X})] \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P_V: \quad X(\Omega)^n &\longrightarrow [0; 1] \\ \vec{x} &\longmapsto p_v = P[T > T(\vec{x}) \mid H_0] = 1 - F_0[T(\vec{x})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[P_V \leq a \mid H_0] &= P[1 - F_0[T(\vec{X})] \leq a \mid H_0] = P[F_0[T(\vec{X})] \geq 1 - a \mid H_0] \\ &= P[U(0, 1) \geq 1 - a] = 1 - P[U(0, 1) < 1 - a] \\ &= 1 - (1 - a) = a \implies P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1) \end{aligned}$$

## Proposición

...el P-valor  $P_V$  sigue una distribución uniforme,  $P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$ .

## Demostración (versión 3, con aun más detalle)

$$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto x$$

$$\vec{X}: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\omega \longmapsto \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$T: \vec{X}(\Omega) = X(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\vec{x} \longmapsto t = T(\vec{x})$$

$$T \circ \vec{X}: (\Omega, \mathcal{A}, P_\theta) \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

$$\omega \longmapsto T(\vec{X}(\omega))$$

## Proposición

...el P-valor  $P_V$  sigue una distribución uniforme,  $P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$ .

## Demostración (versión 3, continuación)

$$\begin{aligned} P_V: \quad X(\Omega)^n &\longrightarrow [0; 1] \\ \vec{x} &\longmapsto p_v = P[T > T(\vec{x}) \mid H_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_V \circ \vec{X}: \quad (\Omega, \mathcal{A}, P_\theta) &\longrightarrow [0; 1] \\ \omega &\longmapsto P_{\theta_0}[T \circ \vec{X}(\Omega) > T \circ \vec{X}(\omega)] \\ &= P_{\theta_0}\{\omega' \mid T(\vec{X}(\omega')) > T(\vec{X}(\omega))\} \\ &= 1 - F_{T(\vec{X})}^{\theta_0}(T(\vec{X}(\omega))) \end{aligned}$$

$$0 < a < 1 \implies F_{P_V}^{\theta_0}(a) = P_{\theta_0}\left\{\omega \mid 1 - F_{T(\vec{X})}^{\theta_0}(T(\vec{X}(\omega))) \leq a\right\}$$

## Proposición

...el P-valor  $P_V$  sigue una distribución uniforme,  $P_V \stackrel{H_0}{\equiv} U(0, 1)$ .

## Demostración (versión 3, continuación)

$$\begin{aligned} 0 < a < 1 &\implies F_{P_V}^{\theta_0}(a) = P_{\theta_0} \left\{ \omega \mid 1 - F_{T(\vec{X})}^{\theta_0} (T(\vec{X}(\omega))) \leq a \right\} \\ &= P \left\{ \omega \mid 1 - U(\omega) \leq a \right\} \text{ con } U \equiv \mathcal{U}(0; 1) \\ &= P \left\{ \omega \mid U'(\omega) \leq a \right\} \text{ con } U' \equiv \mathcal{U}(0; 1) \\ &= P[U' \leq a] = a \implies P_V|_{H_0} \equiv U(0; 1) \end{aligned}$$