1. Enunciado

Aplica el lema de Neyman y Pearson para contrastar

$$H_0 \equiv X \hookrightarrow \mathcal{B}(p = 0{,}5) \qquad H_1 \equiv X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda = 0{,}5)$$

a nivel $\alpha = 0{,}05$ a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño n.

2. Resolución

Para una muestra $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ con $x_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$,

$$\begin{aligned} L(\vec{x} \mid H_0) &= p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i} I(x_{(n)} \leq 1) \\ L(\vec{x} \mid H_1) &= e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{\prod x_i!} \end{aligned}$$

Bajo H_0, $x_{(n)} > 1$ es un resultado imposible y, de observarlo, habría que rechazar H_0.
La razón de verosimilitudes vale:

$$\frac{L(\vec{x} \mid H_1)}{L(\vec{x} \mid H_0)} = \begin{cases} \infty & x_{(n)} > 1 \\ \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}/\prod x_i!}{p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}} & x_{(n)} \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{L(\vec{x} \mid H_1)}{L(\vec{x} \mid H_0)} > k \right\} = \text{R.C.1} \cup \text{R.C.2}$$

donde

$$\text{R.C.1} = \{\vec{x} \mid L(\vec{x} \mid H_0) = 0, L(\vec{x} \mid H_1) > 0\} = \left\{\vec{x} \;\middle|\; x_{(n)} > 1\right\}$$

$$\text{R.C.2} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{L(\vec{x} \mid H_1)}{L(\vec{x} \mid H_0)} > k \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}/\prod x_i!}{p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}} > k \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\langle \forall i, 0 \leq x_i \leq 1 \implies \prod x_i! = 1 \right\rangle =$$

$$= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}}{p^{\sum x_i}(1-p)^{n-\sum x_i}} > k \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; -n\lambda + \sum x_i \ln\lambda - \sum x_i \ln p - \left(n - \sum x_i\right) \ln(1-p) > k' \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \sum x_i \left[\ln\lambda - \ln p + \ln(1-p)\right] > k'' \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\} =$$

$$= \left\{ \vec{x} \,\middle|\, \tau \sum x_i > k'' \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\}$$

donde $\tau = \ln\lambda - \ln p + \ln(1-p)$, $k' = \ln k$ y $k'' = k' + n\lambda + n\ln(1-p)$.
Dependiendo del signo de τ, la región crítica toma las siguientes formas:

- $\tau > 0$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \mid x_{(n)} > 1 \right\} \bigcup \left\{ \vec{x} \,\middle|\, x_{(n)} > 1 \cap \sum x_i > \frac{k''}{\tau} = k''' \right\}$$

- $\tau < 0$

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \mid x_{(n)} > 1 \right\} \bigcup \left\{ \vec{x} \,\middle|\, x_{(n)} > 1 \cap \sum x_i < k''' \right\}$$

- $\tau = 0$ (por ejemplo, cuando $\lambda = 1$ y $p = 0{,}5$). En este caso la razón de verosimilitudes vale

$$\frac{L(\vec{x} \mid H_1)}{L(\vec{x} \mid H_0)} = \begin{cases} \infty & x_{(n)} > 1 \\ \frac{e^{-n\lambda}}{p^n} & x_{(n)} \leq 1 \end{cases}$$

  luego en la expresión de la región crítica no aparece $\sum X_i$. Para un nivel de significación α, la función crítica del contraste toma la forma

$$\varphi_\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} > 1 \\ \alpha & x_{(n)} \leq 1 \end{cases}$$

  Los únicos contrastes puros que se pueden usar en esta situación serían:

  - Contraste de tamaño cero, φ_0,

$$\varphi_0(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & x_{(n)} > 1 \\ 0 & x_{(n)} \leq 1 \end{cases}$$

    que tiene probabilidad cero de cometer el error de tipo uno.

  - Contraste de tamaño uno, φ_1,

$$\varphi_0(\vec{x}) = 1 \quad \forall\, \vec{x}$$

    que rechaza siempre H_0.

En el enunciado del ejercicio se tiene $\lambda = p = 0{,}5$, luego $\tau < 0$ y

$$\text{R.C.2} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \sum x_i > k''' \;\cap\; x_{(n)} \leq 1 \right\}$$

Por tanto,

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; x_{(n)} > 1 \;\cup\; \left(x_{(n)} \leq 1 \cap \sum x_i < k''' \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{R.C.} \mid H_0] &= \Pr\left[X_{(n)} > 1 \;\cup\; \left(x_{(n)} \leq 1 \cap \sum x_i < k''' \right) \;\middle|\; H_0 \right] = \\
&= \Pr[X_{(n)} > 1 \mid H_0] + \Pr\left[X_{(n)} \leq 1 \;\cap\; \sum X_i < k''' \;\middle|\; H_0 \right] = \\
&= 0 + \Pr\left[\sum X_i < k''' \;\middle|\; X_{(n)} \leq 1 \;\cap\; H_0 \right] \Pr\left[X_{(n)} \leq 1 \mid H_0 \right] = \\
&= 0 + \Pr\left[\sum X_i < k''' \;\middle|\; X_{(n)} \leq 1 \;\cap\; H_0 \right] \cdot 1 = \\
&= \Pr[\mathcal{B}(n,p) \leq k'''] \leq \alpha
\end{aligned}$$

3. Ejemplos

3.1. $n = 3$

```
> p = 1/2
> n = 3
> pbinom (0, n, p)
```

```
[1] 0.125
```

es mayor que $\alpha = 0{,}05$, por lo que R.C. = R.C.1 $= \{\vec{x} \mid x_{(n)} > 1\}$ y el contraste tendría tamaño $\Pr(R.C. \mid H_0) = 0$.

3.2. $n = 10$

```
> n = 10
> pbinom (1, n, p)
```

```
[1] 0.01074219
```

```
> pbinom (2, n, p)
```

```
[1] 0.0546875
```

y para $\alpha = 0{,}05$ se tiene R.C. $= \{\vec{x} \mid x_{(n)} > 1 \;\cup\; \sum x_i \leq 1\}$, con tamaño $\Pr(R.C. \mid H_0) = 0{,}0107421875$.

3.3. $n = 3$, con más detalle

Comprobaremos para $n = 3$ que el cociente de verosimilitudes $\frac{L(\vec{x}|H_1)}{L(\vec{x}|H_0)}$ es mayor cuando $\sum x_i$ es pequeño:

```
> p = 1/2 ; landa = 1/2
> for (x1 in 0:1) for (x2 in 0:1) for (x3 in 0:1)
+    cat (x1,x2,x3, "-> Suma", x1+x2+x3, "-> Razón vero",
+         prod(dpois(c(x1,x2,x3),landa)) /
+         prod(dbinom(c(x1,x2,x3),1,p)),
+         "\n")

0 0 0 -> Suma 0 -> Razón vero 1.785041
0 0 1 -> Suma 1 -> Razón vero 0.8925206
0 1 0 -> Suma 1 -> Razón vero 0.8925206
0 1 1 -> Suma 2 -> Razón vero 0.4462603
1 0 0 -> Suma 1 -> Razón vero 0.8925206
1 0 1 -> Suma 2 -> Razón vero 0.4462603
1 1 0 -> Suma 2 -> Razón vero 0.4462603
1 1 1 -> Suma 3 -> Razón vero 0.2231302
```

3.4. $p = 0{,}5$ y $\lambda = 1$

Se verifica que la distribución de $X_i|_{H_1 \cap X_i \leq 1}$ es la siguiente:

$$\Pr\left[X_i = 1 \mid X_i \leq 1, H_1\right] = \frac{\Pr[X_i = 1 \cap X_i \leq 1 \mid H_1]}{\Pr[X_i \leq 1 \mid H_1]} = \frac{\Pr[X_i = 1 \mid H_1]}{\Pr[X_i \leq 1 \mid H_1]} =$$

$$= \frac{\Pr[\mathcal{P}(\lambda = 1) = 1]}{\Pr[\mathcal{P}(1) = 0] + \Pr[\mathcal{P}(1) = 1]} = \frac{e^{-1}\frac{1^1}{1!}}{e^{-1}\frac{1^0}{0!} + e^{-1}\frac{1^1}{1!}} = \frac{e^{-1}}{e^{-1} + e^{-1}} = \frac{1}{2}$$

es decir, se trata de una $\mathcal{B}(p = 0{,}5)$ idéntica a la de H_0.