Contrastes unilaterales

19 de marzo de 2024

Definición 1. Un contraste *unilateral* es un contraste del tipo:

$$\begin{array}{llcll} H_0: & \theta \leqslant \theta_0 & \qquad & H_0: & \theta \geqslant \theta_0 \\ H_1: & \theta > \theta_0 & & H_1: & \theta < \theta_0 \end{array}$$

Para obtener un resultado similar al del lema de Neyman y Pearson, la familia de distribuciones ha de cumplir ciertas hipótesis.

Definición 2. Sea una familia de distribuciones F_θ, con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Sea T un estadígrafo unidimensional. Si para cada par $\theta_1 < \theta_2$ se cumple que $\frac{f_{\theta_2}(\vec{x})}{f_{\theta_1}(\vec{x})}$ es una función no decreciente de T en $\{\vec{x} \mid f_{\theta_2}(\vec{x}) + f_{\theta_1}(\vec{x}) > 0\}$, entonces se dice que la familia tiene *razón de verosimilitud monótona en T*.

En la definición anterior, si el denominador es cero se considera que el cociente vale $+\infty$.

Ejemplo 1. Sea $X \hookrightarrow \mathcal{U}(0, \theta)$ y sean $0 < \theta_1 < \theta_2$. Entonces

$$f(\vec{x} \mid \theta) = \frac{1}{\theta^n} \cdot \mathbb{1}\left(x_{(n)} < \theta\right)$$

y

$$\frac{f(\vec{x} \mid \theta_2)}{f(\vec{x} \mid \theta_1)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n \frac{\mathbb{1}\left(x_{(n)} < \theta_2\right)}{\mathbb{1}\left(x_{(n)} < \theta_1\right)} = \begin{cases} \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n & x_{(n)} < \theta_1 \\ +\infty & x_{(n)} > \theta_1 \end{cases}$$

luego la familia $\mathcal{U}(0, \theta)$ tiene razón de verosimilitud monótona en $X_{(n)}$.

Teorema 1. Si la familia F_θ pertenece a su vez a la familia exponencial uniparamétrica,

$$f(\vec{x} \mid \theta) = c(\theta) h(\vec{x}) \exp[Q(\theta) T(\vec{x})]$$

y Q es creciente, entonces tiene razón de verosimilitud monótona en T.

Demostración. Dados $\theta_1 < \theta_2$ se tiene que

$$\frac{f(\vec{x} \mid \theta_2)}{f(\vec{x} \mid \theta_1)} = \frac{c(\theta_2)}{c(\theta_1)} \exp[\{Q(\theta_2) - Q(\theta_1)\} T(\vec{x})]$$

y, por ser Q creciente, $\frac{f(\vec{x} \mid \theta_2)}{f(\vec{x} \mid \theta_1)}$ es no decreciente en T. □

Teorema 2 (de Karlin-Rubin)**.** Sea una familia de distribuciones F_θ, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, con razón de verosimilitud monótona en T. Entonces

1. Un contraste
$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & T(\vec{x}) > c \\ \gamma & T(\vec{x}) = c \\ 0 & T(\vec{x}) < c \end{cases}$$
para contrastar
$$\begin{array}{ll} H_0\colon & \theta \leqslant \theta_0 \\ H_1\colon & \theta > \theta_0 \end{array}$$
tiene función de potencia estrictamente creciente cuando $0 < \operatorname{Pot}(\theta) < 1$.

2. $\forall\, \alpha \in (0,1)\ \exists\, \varphi$ de la forma anterior con tamaño $E\left(\varphi \mid \theta_0\right) = \alpha$ y uniformemente de máxima potencia.

3. $\forall\, \varphi'$ con $E\left(\varphi' \mid \theta_0\right) = \alpha$ se cumple que $\forall\, \theta \leqslant \theta_0\ E\left(\varphi \mid \theta\right) \leq E\left(\varphi' \mid \theta\right)$.

Análogamente, se tendría un resultado simétrico para los contrastes unilaterales en sentido contrario,
$$\begin{array}{ll} H_0\colon & \theta \geqslant \theta_0 \\ H_1\colon & \theta < \theta_0 \end{array}$$

Demostración. Se hará sólo para el contraste
$$\begin{array}{ll} H_0\colon & \theta \leqslant \theta_0 \\ H_1\colon & \theta > \theta_0 \end{array}$$

1. Sean $\theta_1 < \theta_2$ dos valores del parámetro. Tenemos que ver que $\operatorname{Pot}(\theta_1) \leqslant \operatorname{Pot}(\theta_2)$.

   Por el lema de Neyman-Pearson
$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & f\left(\vec{x} \mid \theta_2\right) > kf\left(\vec{x} \mid \theta_1\right) \\ \gamma(\vec{x}) & f\left(\vec{x} \mid \theta_2\right) = kf\left(\vec{x} \mid \theta_1\right) \\ 0 & f\left(\vec{x} \mid \theta_2\right) < kf\left(\vec{x} \mid \theta_1\right) \end{cases}$$
   es un contraste de máxima potencia para
$$\begin{array}{ll} H_0\colon & \theta = \theta_1 \\ H_1\colon & \theta = \theta_2 \end{array}$$
   y tiene tamaño $E\left(\varphi \mid \theta_1\right) = \alpha_1$. Como la distribución es de razón de verosimilitud monótona, entonces $\frac{f(\vec{x} \mid \theta_2)}{f(\vec{x} \mid \theta_1)}$ es creciente en T y uno de los posibles contrastes con esa forma sería:
$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & T(\vec{x}) > c \\ \gamma & T(\vec{x}) = c \\ 0 & T(\vec{x}) < c \end{cases}$$

Considérese el contraste constante $\varphi_1(\vec{x}) = \alpha_1 \, \forall \, \vec{x}$. Su esperanza es α_1 para cualquier θ y, en concreto, para θ_1:

$$E(\varphi_1 \mid \theta_1) = \alpha_1$$

Así

$$\operatorname{Pot}_\varphi(\theta_1) = E(\varphi \mid \theta_1) = \alpha_1 = E(\varphi_1 \mid \theta_2) \leq E(\varphi \mid \theta_2) = \operatorname{Pot}_\varphi(\theta_2)$$

la función potencia es no decreciente.

Si la desigualdad no fuera estricta, φ y φ_1 tendrían la misma potencia, pero φ no es de la forma indicada por el lema de Neyman-Pearson y estamos suponiendo que $0 < \operatorname{Pot}(\theta) < 1$. Por tanto

$$\operatorname{Pot}_\varphi(\theta_1) < \operatorname{Pot}_\varphi(\theta_2)$$

2. Sea $0 < \alpha < 1$. Por el lema de Neyman-Pearson existe un contraste φ con la forma dada en el apartado anterior y con tamaño $E(\varphi \mid \theta_0) = \alpha$. Como la función de potencia es creciente,

$$\forall \, \theta \leqslant \theta_0, \quad \operatorname{Pot}_\varphi(\theta) \leqslant \operatorname{Pot}_\varphi(\theta_0) = E(\varphi \mid \theta_0) = \alpha$$

luego φ tiene tamaño α.

Sea $\theta_1 > \theta_0$. Por el lema Neyman-Pearson φ es de máxima potencia para contrastar

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \theta = \theta_0 \\ H_1: &\quad \theta = \theta_1 \end{aligned}$$

luego para cualquier otro contraste φ' con nivel de significación α,

$$\forall \, \theta_1 > \theta_0, \quad E(\varphi' \mid \theta_1) \leqslant E(\varphi \mid \theta_1)$$

luego φ es uniformente más potente.

3. Considérese ahora $\theta_2 < \theta_0$. Al contrastar

$$\begin{aligned} H_0: &\quad \theta = \theta_0 \\ H_1: &\quad \theta = \theta_2 \end{aligned}$$

el lema de Neyman-Pearson muestra que $1-\varphi$ es el más potente de tamaño $1-\alpha$, pues:

- Existe un contraste φ^* de máxima potencia, de la forma

$$\varphi^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \frac{L(\vec{x},\theta_2)}{L(\vec{x},\theta_0)} > k \\ \gamma^* & \frac{L(\vec{x},\theta_2)}{L(\vec{x},\theta_0)} = k \\ 0 & \frac{L(\vec{x},\theta_2)}{L(\vec{x},\theta_0)} < k \end{cases}$$

- Como X es de razón de verosimilitud monótona en T y $\theta_2 < \theta_0$, $\frac{L(\vec{x},\theta_2)}{L(\vec{x},\theta_0)}$ es decreciente en T y el contraste anterior puede escribirse

$$\varphi^*(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & T(\vec{x}) < k^* \\ \gamma^{**} & T(\vec{x}) = k^* \\ 0 & T(\vec{x}) > k^* \end{cases}$$

- Considerar ahora el contraste

$$1 - \varphi(\vec{x}) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & T(\vec{x}) > c \\ 1-\gamma & \text{si} & T(\vec{x}) = c \\ 1 & \text{si} & T(\vec{x}) < c \end{array} \right.$$

- Este contraste $1-\varphi$ es de la misma forma que φ^*, luego por N&P es de máxima potencia entre los de su tamaño. Su tamaño es

$$E_{\theta_0}(1-\varphi) = 1 - E_{\theta_0}(\varphi) = 1 - \alpha$$

Sea otro contraste φ' con $E(\varphi' \mid \theta_0) = \alpha$. Entonces $1-\varphi'$ cumple que $E(1-\varphi' \mid \theta_0) = 1-\alpha$ y

$$\forall\, \theta < \theta_0, \quad 1 - E(\varphi' \mid \theta) = E(1-\varphi' \mid \theta) \leqslant E(1-\varphi \mid \theta) = 1 - E(\varphi \mid \theta)$$

luego $E(\varphi \mid \theta) \leqslant E(\varphi' \mid \theta)$ para todo $\theta \leqslant \theta_0$.

□

Ejemplo 2. Sea $X \hookrightarrow \text{Exp}(\lambda)$ y el contraste

$$\begin{array}{ll} H_0: & \lambda \leqslant 2 \\ H_1: & \lambda > 2 \end{array}$$

Hay razón de verosimilitud monótona en $T = -\sum X_i$ porque

$$\lambda_1 < \lambda_2 \implies \frac{f(\vec{x} \mid \lambda_2)}{f(\vec{x} \mid \lambda_1)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n e^{-\sum x_i(\lambda_2-\lambda_1)}$$

es creciente en $-\sum x_i$. Por tanto, un contraste óptimo sería

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & -\sum x_i > c \equiv \sum x_i < c \\ 0 & -\sum x_i < c \equiv \sum x_i > c \end{cases}$$

ya que el caso $\sum x_i = c$ tiene probabilidad 0 porque $\sum X_i \hookrightarrow \gamma(n,\lambda)$ es continua. La región crítica sería

$$\text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \sum x_i < \texttt{qgamma(}\alpha\texttt{,}n\texttt{,2)} \right\}$$

Ejemplo 3. Sea $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ y el contraste

$$\begin{array}{ll} H_0: & p \leqslant 0\text{'}2 \\ H_1: & p > 0\text{'}2 \end{array}$$

Como

$$p_1 < p_2 \implies \frac{f(\vec{x} \mid p_2)}{f(\vec{x} \mid p_1)} = \left(\frac{p_2}{p_1}\frac{1-p_1}{1-p_2}\right)^{\sum x_i} \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^n \text{ es creciente en } \sum x_i$$

pues $\frac{p_2}{p_1} > 1$ y $\frac{1-p_1}{1-p_2} > 1$, entonces hay razón de verosimilitud monótona en $T = \sum X_i$.

Según Karlin-Rubin, un contraste óptimo sería

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \sum x_i > c \\ \gamma & \sum x_i = c \\ 0 & \sum x_i < c \end{cases}$$

con c y γ calculados para que $E(\varphi \mid p = 0\text{'}2) = \alpha$. Por ejemplo, si $\alpha = 0\text{'}05$ y disponemos de una muestra de tamaño 5,

$$T = \sum X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(5, p) \implies \begin{cases} \Pr[T > 3] = \texttt{1-pbinom(3,5,0.2)} = 0\text{'}00672 \\ \Pr[T > 2] = \texttt{1-pbinom(2,5,0.2)} = 0\text{'}05792 \\ \Pr[T = 3] = \texttt{dbinom(3,5,0.2)} = 0\text{'}0512 \end{cases}$$

luego $c = 3$ y

$$0\text{'}05 = E(\varphi \mid p = 0\text{'}2) = \Pr[T > 3] + \gamma \Pr[T = 3]$$

$$\gamma = \frac{0\text{'}05 - \Pr[T > 3]}{\Pr[T = 3]} = 0\text{'}8453125$$

Así, φ sería el contraste aleatorizado uniformemente más potente, y no habría un contraste determinístico óptimo a nivel α.