Contrastes bilaterales

1 de marzo de 2022

Los procedimientos vistos hasta ahora aseguraban la existencia del contraste uniformemente más potente en casos unilaterales. Para el caso bilateral no existe un resultado tan general.

Ejemplo 1. Sea $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, 1)$ y considérese el contraste

$$\begin{array}{ll} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{array}$$

Sea φ el contraste intuitivo con región crítica

$$\left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$$

Por ejemplo, con $\mu_0 = 0$, $n = 25$ y $\alpha = 0\text{'}05$,

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid |5\bar{x}| > 1\text{'}96\} = \{\vec{x} \mid |\bar{x}| > 0\text{'}392\}$$

Entonces su potencia en $\mu = 0\text{'}5$ es

$$\Pr\left[|\bar{x}| > 0\text{'}392 \mid \mu = 0\text{'}5\right] = \Pr\left[|\mathcal{N}(0\text{'}5, 0\text{'}2)| > 0\text{'}392\right] =$$

$$= \Pr\left[\mathcal{N}(0\text{'}5, 0\text{'}2) > 0\text{'}392\right] + \Pr\left[\mathcal{N}(0\text{'}5, 0\text{'}2) < -0\text{'}392\right] = 0\text{'}7054$$

Sea el contraste φ' con región crítica

$$\left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{\bar{x} - \mu_0}{1/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha} \right\} = \{\vec{x} \mid \bar{x} > 0\text{'}329\}$$

Entonces su potencia en $\mu = 0\text{'}5$ es

$$\Pr\left[\bar{x} > 0\text{'}329 \mid \mu = 0\text{'}5\right] = 0\text{'}8037$$

Luego φ' es más potente que φ en 0'5, pero no lo será para valores $\mu < \mu_0$.

En el caso bilateral tendremos que restringir la clase de contrastes.

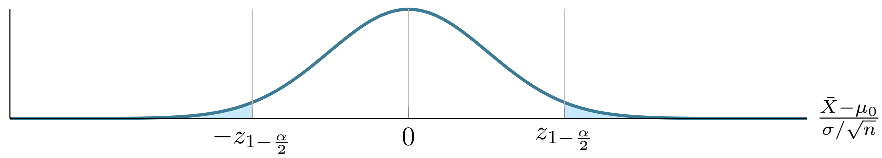
Definición 1. Un contraste φ con nivel de significación α se dice *insesgado* si $\forall\, \theta \in \Theta_1$, $E(\varphi \mid \theta) \geqslant \alpha$.

Es decir, la probabilidad de rechazar H_0 cuando es falsa es siempre mayor (o igual) que cuando es verdadera.

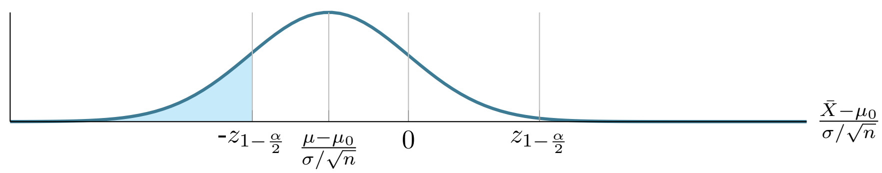
Ejemplo 2. En el ejemplo anterior, φ es insesgado pero φ' no:

φ

H_0

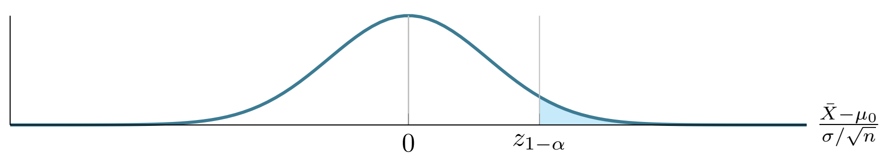


H_1

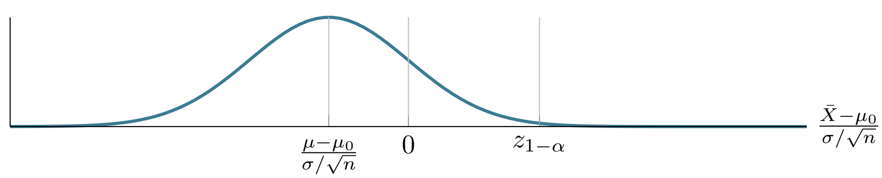


φ'

H_0



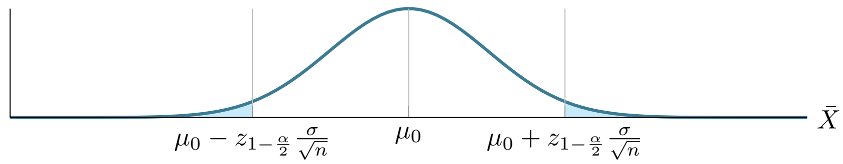
H_1



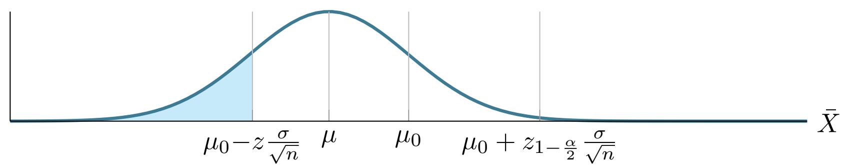
Ejemplo 3. Mismo ejemplo, usando como estadístico $\bar{X}$ en vez de $\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$.

φ

H_0

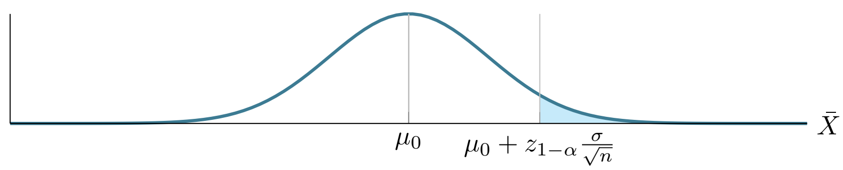


H_1



φ'

H_0



H_1