

Test de la razón de verosimilitudes

8 de marzo de 2023

Como en la situación general no existe el test UMP, es interesante disponer de métodos de contraste basados en principios razonables que permitan diseñar test adecuados en cualquier circunstancia. El más importante de estos métodos es el de la razón de verosimilitudes, que coincide con el de Neyman-Pearson para hipótesis simples y que guarda una estrecha relación con el principio de máxima verosimilitud.

Definición 1. Sea X una variable aleatoria con distribución perteneciente a una familia $\{F_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k\}$. El estadístico de la razón de verosimilitudes para el contraste $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ se define como:

$$\Lambda_n(\vec{x}) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\vec{x}, \theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L(\vec{x}, \theta)} = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L(\vec{x}, \theta)}{L(\vec{x}, \hat{\theta}_{MV})}$$

que verifica por su definición $0 \leq \Lambda \leq 1$.

Definición 2. El test de razón de verosimilitudes para el contraste $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \in \Theta \setminus \Theta_0$ se define como:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Lambda(\vec{x}) < c \\ \gamma(\vec{x}) & \text{si } \Lambda(\vec{x}) = c \\ 0 & \text{si } \Lambda(\vec{x}) > c \end{cases}$$

con $c \in (0, 1)$ y γ tales que para un nivel de significación α verifiquen que

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} E_\theta(\varphi) = \alpha$$

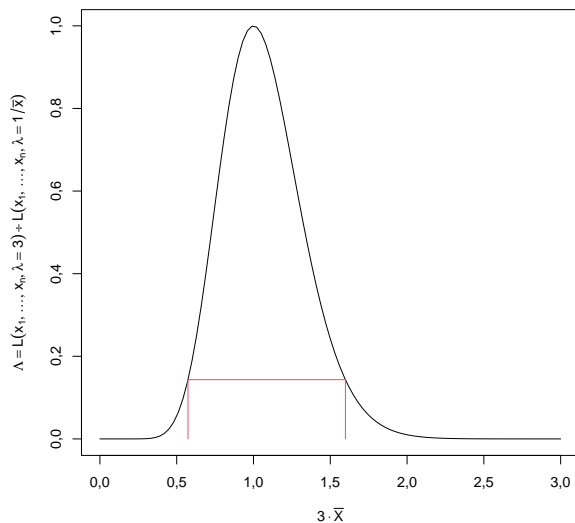
Ejemplo 1. Sea $X \equiv \text{Exp}(\lambda)$. Se considera el contraste $H_0 : \lambda = 3$ frente a $H_1 : \lambda \neq 3$. Estadístico de la razón de verosimilitudes:

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{f_3(x_1, \dots, x_n)}{\sup_{\lambda > 0} f_\lambda(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f_3(\vec{x})}{f_{1/\bar{x}}(\vec{x})} = (3\bar{x})^n \exp[-n(3\bar{x} - 1)] = g(3\bar{x})$$

La función $g(y) = y^n \cdot e^{-ny}$ tiene derivada

$$g'(y) = ny^{n-1}e^{-ny} - y^n e^{-ny}n = \underbrace{ny^{n-1}e^{-ny}}_{>0}(1 - y)$$

luego Λ crece si $3\bar{x} < 1$ y decrece si no. En concreto, si $n = 15$ la gráfica del estadístico de la RV en función de $3\bar{x}$ es:



obtenible por ejemplo así:

```
n <- 15
Landa <- function (x3) x3^n * exp(-n*(x3-1))
plot (Landa, 0, 3)
```

Para buscar el valor de c se puede proceder así:

$$\begin{aligned}
 X \stackrel{H_0}{\equiv} \text{Exp}(3) &\implies \sum_{i=1}^{15} X_i \stackrel{H_0}{\equiv} \gamma(15; 3) \\
 &\implies \bar{X} \stackrel{H_0}{\equiv} \gamma(15; 45) \\
 &\implies 3\bar{X} \stackrel{H_0}{\equiv} \gamma(15; 15) \\
 &\implies 1 - \alpha = \Pr[\Lambda > c] = \Pr[a < \gamma(15; 15) < b]
 \end{aligned}$$

Llegados aquí, podría pensarse en tomar dos colas $(-\infty, a]$ y $[b, \infty)$ de probabilidades $\frac{\alpha}{2}$ cada una:

```
qgamma (c(alfa/2,1-alfa/2), 15, 15)
```

Por ejemplo, para $\alpha = 0,05$:

```
0.5596924 1.5659747
```

Por otro lado, para hacerlo con rigor haría falta obtener el valor de c . Dado un valor c , se obtendrían a y b así:

```

argmax <- optimize (Landa, c(0,3), maximum=TRUE) $ maximum
a <- uniroot (function (x) Landa(x)-c, c(0,argmax)) $ root
b <- uniroot (function (x) Landa(x)-c, c(argmax,3)) $ root

```

luego la búsqueda de un c óptimo para cierto α podría ser:

```

prob <- function (c)
{
  a <- uniroot (function (x) Landa(x)-c, c(0,argmax)) $ root
  b <- uniroot (function (x) Landa(x)-c, c(argmax,3)) $ root
  1 - diff (pgamma (c(a,b), 15, 15))
}
cOptimo <- uniroot(function (c) prob(c)-alfa, c(0.01,0.99))$root

```

Si $\alpha = 0,05$, entonces el test de la RV se obtiene con $c = 0,1434$. Para calcular su RC hacen falta

```

aOptimo <- uniroot(function(x)Landa(x)-cOptimo,c(0,argmax))$root
bOptimo <- uniroot(function(x)Landa(x)-cOptimo,c(argmax,3))$root

```

y se obtiene

$$RC = \{\bar{x} \mid 3\bar{x} < 0,5735\} \cup \{\bar{x} \mid 3\bar{x} > 1,5986\}$$

Otra forma de obtener una aproximación de c usa el método de Montecarlo:

```

distroRV <- Landa (rgamma (1e7, 15, 15))
cOptimo <- quantile (distroRV, alfa)

```

Si se dispone de una muestra, se puede calcular directamente el P-valor sin necesidad de buscar explícitamente la RC. Por ejemplo, sea la muestra

```

X <- c (0.10518, 0.09668, 0.16034, 0.08352, 0.62414, 0.17303,
       0.02056, 0.24611, 0.05616, 0.16425, 0.35605, 0.26343,
       0.19961, 0.04536, 0.00634)
## usando Montecarlo
LandaX <- Landa (3 * mean(X))
prob (LandaX) # aproximación numérica
mean (distroRV < LandaX) # P-valor = 0.0232
## usando distribución exacta de 3media = gamma(15;15)
## suponiendo dos colas equiprobables
2 * min (p <- pgamma(3*mean(X), 15, 15), 1-p) # P-valor = 0.0283
## buscando c
c = Landa(3*mean(X))
a <- uniroot(function (x) Landa(x)-c, c(0,1))$root # a = 3mediaX
b <- uniroot(function (x) Landa(x)-c, c(1,3))$root
pgamma(a,15,15) + 1-pgamma(b,15,15) # P-valor = 0.02315864

```

Ejemplo 2. Considerando una versión unilateral del ejemplo anterior,

$$H_0 : \lambda \leq 3 \quad H_1 : \lambda > 3$$

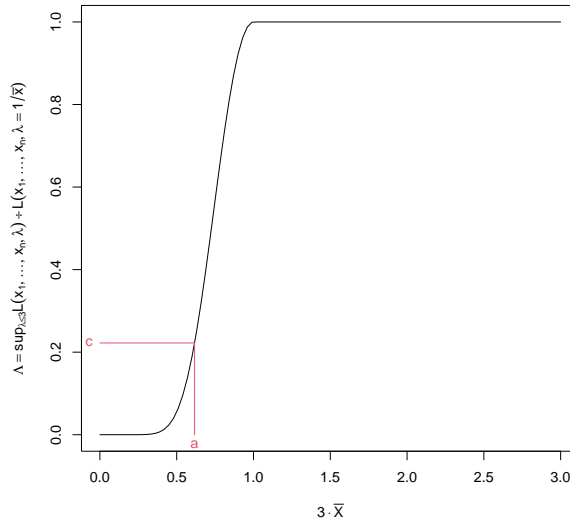
el estadístico de razón de verosimilitudes sería

$$\Lambda(\vec{x}) = \frac{\sup_{\lambda \leq 3} f_{\lambda}(x_1, \dots, x_n)}{\sup_{\lambda > 0} f_{\lambda}(x_1, \dots, x_n)} =$$

$$= \begin{cases} \frac{f_3(\vec{x})}{f_{1/\bar{x}}(\vec{x})} = (3\bar{x})^n \exp[-n(3\bar{x} - 1)] = g(3\bar{x}), & \hat{\theta}_{MV} > 3 \Leftrightarrow 3\bar{x} < 1 \\ 1, & \hat{\theta}_{MV} \leq 3 \Leftrightarrow 3\bar{x} \geq 1 \end{cases}$$

con región crítica R.C. = $[3\bar{X} < a]$ con $\alpha = \Pr[\text{R.C.} \mid H_0] = \Pr[\gamma(n, n) < a]$.
 Para $n = 15$ y $\alpha = 0,05$, $a = \text{qgamma}(0.05, 15, 15) = 0,6164$.

```
Landa1 <- function (x3) ifelse (x3 < 1, Landa(x3), 1)
plot (Landa1, 0, 3)
```



El test de la razón de verosimilitudes es función de cualquier estadístico suficiente y con frecuencia se puede expresar en términos de estadísticos sencillos con distribución conocida; en caso contrario puede resultar complicado calcular la distribución de Λ , siendo necesario recurrir a distribuciones asintóticas, que bajo condiciones de regularidad son conocidas; otra dificultad con la que nos podemos encontrar es la búsqueda de supremos para el cálculo del estadístico Λ .

Teorema 1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_{θ} , con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, que verifica las condiciones de regularidad¹ necesarias para

¹Vistas en el tema sobre estimación puntual:

la existencia de solución única de la ecuación de verosimilitud, $\hat{\theta}$, y convergencia asintótica del E.M.V.: $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\theta)^{-1}})$, donde $I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f_X(X, \theta) \right)^2 \right] = E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f_X(X, \theta) \right]$ es la información de Fisher sobre θ aportada por una observación de X .

El estadístico de la razón de verosimilitudes para el contraste $H_0 : \theta = \theta_0$ frente $H_1 : \theta \neq \theta_0$ verifica:

$$-2 \ln \Lambda_n = -2 \ln \frac{L(\vec{x}_n, \theta_0)}{L(\vec{x}_n, \hat{\theta}_n)} \xrightarrow{H_0} \chi_1^2$$

Demostración. Aplicando el desarrollo de Taylor a $l(\vec{x}_n, \theta) = \ln L(\vec{x}_n, \theta)$, considerada como función de θ , en torno a $\hat{\theta}_n$ se tiene que:

$$l(\vec{x}_n, \theta) = l(\vec{x}_n, \hat{\theta}_n) + \underbrace{(\theta - \hat{\theta}_n) \frac{\partial}{\partial \theta} l(\vec{x}_n, \theta) \Big|_{\hat{\theta}_n}}_{=0} + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}_n)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\vec{x}_n, \theta) \Big|_{\theta_n^*}$$

con $|\theta_n^* - \theta| < |\hat{\theta}_n - \theta|$. Valorando el anterior desarrollo en el punto θ_0 y operando se tiene:

$$-2 \ln \Lambda_n = -2[l(\vec{x}_n, \theta_0) - l(\vec{x}_n, \hat{\theta}_n)] = -(\theta_0 - \hat{\theta}_n)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\vec{x}_n, \theta) \Big|_{\theta_n^*}$$

Multiplicando y dividiendo por $nI(\theta_0)$,

$$-2 \ln \Lambda_n = nI(\theta_0) (\theta_0 - \hat{\theta}_n)^2 \frac{-\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\vec{x}_n, \theta) \Big|_{\theta_n^*}}{nI(\theta_0)}$$

Cuando H_0 es cierta, bajo las condiciones de regularidad sabemos que se verifica:

$$\sqrt{nI(\theta_0)}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \Rightarrow nI(\theta_0)(\hat{\theta}_n - \theta_0)^2 \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

por el teorema de Mann-Wald², y además

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{\text{c.s.}} \theta_0 \Rightarrow \theta_n^* \xrightarrow{\text{c.s.}} \theta_0$$

Por otro lado, por la ley fuerte de los grandes números se tiene que

$$\frac{1}{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(\vec{X}_n, \theta) \Big|_{\theta^*} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(X_i, \theta) \Big|_{\theta^*} \xrightarrow{\text{c.s.}} E_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} l(X, \theta) \right] = -I(\theta_0)$$

-
- $\theta \neq \theta' \implies F_\theta \neq F_{\theta'}$,
 - el soporte $\{x \mid f(x, \theta) > 0\}$ no depende de θ
 - θ_0 pertenece a un intervalo abierto de Θ
 - $f(x, \theta)$ es derivable dos veces respecto a θ
 - las integrales $\int \left| \frac{\partial^i}{\partial \theta^i} f(\vec{x}, \theta) \right| dx$ son finitas para $i \in \{1; 2\}$

²Teorema de Henry Mann y Abraham Wald, o del mapeo continuo: $X_n \rightarrow X$, g continua, $\implies g(X_n) \rightarrow g(X)$, sea en ley, probabilidad o casi seguro.

Aplicando el teorema de Slutski³, si H_0 es cierta

$$-2 \ln \Lambda_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_1^2$$

□

Ejemplo 3. Continuando el ejemplo 1 (pág. 1),

```

alfa <- 0.05
## RC = [-2 ln Landa > k] con -2 ln Landa = ji2(1gl)
k <- qchisq(1-alfa, 1) # 3.841459
n <- 15
Landa <- function (x3) x3^n * exp(-n*(x3-1))
X <- c (0.10518, 0.09668, 0.16034, 0.08352, 0.62414, 0.17303,
       0.02056, 0.24611, 0.05616, 0.16425, 0.35605, 0.26343,
       0.19961, 0.04536, 0.00634)
menos2lnLandaX <- -2 * log (Landa (3 * mean (X)))
menos2lnLandaX > k # TRUE => rechazamos H0
1-pchisq(menos2lnLandaX,1) # 0.02241106 p-valor aproximado

```

Vamos a ver a continuación otras situaciones en las que se dispone de resultados asintóticos del TRV para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta \neq \theta_0$ con $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ bajo ciertas condiciones de regularidad.

Un resultado análogo se obtiene en el caso k -paramétrico:

Teorema 2. Sea X una v.a. con distribución perteneciente a una familia F_θ , $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Bajo condiciones de regularidad, el TRV para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta \neq \theta_0$ verifica que

$$-2 \ln \Lambda(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_k^2 \quad \text{bajo } H_0$$

A su vez el resultado anterior puede generalizarse a través del siguiente teorema:

Teorema 3. Sea X una v.a. con distribución perteneciente a una familia F_θ , $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Consideramos Θ_0 un abierto de dimensión p .

Bajo condiciones de regularidad, para realizar el contraste $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \notin \Theta_0$, se verifica que

$$-2 \ln \Lambda(\vec{x}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \chi_{k-p}^2 \quad \text{bajo } H_0$$

Ejemplo 4. Sea $X \equiv N(\mu, \sigma)$ y $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ una muestra suya. Aplicar el TRV al contraste $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

³Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ y $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c$, entonces $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$. Recuerdese que $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} c \implies Y_n \xrightarrow{\text{Pr}} c$.

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$L(\vec{x} | \mu, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Lambda = \frac{\sup_{\sigma} L(\vec{x} | \mu_0, \sigma)}{\sup_{\mu, \sigma} L(\vec{x} | \mu, \sigma)}$$

$$\sup_{\mu, \sigma} L(\vec{x} | \mu, \sigma) = L(\vec{x} | \mu = \hat{\mu}_{\text{MV}} = \bar{x}, \sigma = \hat{\sigma}_{\text{MV}} = s)$$

$$\sup_{\sigma} L(\vec{x} | \mu_0, \sigma) = L(\vec{x} | \mu = \mu_0, \sigma = s_0)$$

siendo

$$s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad s_0^2 = \frac{\sum(x_i - \mu_0)^2}{n}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s_0^2}} \right)^n e^{-\frac{\sum(x_i - \mu_0)^2}{2s_0^2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} \right)^n e^{-\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2s^2}}} = \left(\frac{s^2}{s_0^2} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{-\frac{n}{2}}}{e^{-\frac{n}{2}}} = \left(\frac{s^2}{s_0^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2 + \sum(\bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{RC} &= [\Lambda < c] = \left[\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2} \right)^{\frac{n}{2}} < c \right] \\ &= \left[\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2} < c' \right] \\ &= \left[\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2} > c'' \right] \\ &= \left[\frac{s^2 + (\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2} > c'' \right] \\ &= \left[1 + \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2} > c'' \right] \\ &= \left[\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2} > c''' \right] \end{aligned}$$

Bajo H_0 ,

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n-1} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}} \sqrt{n} \equiv t_{n-1}$$

$$\frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{s^2}(n-1) = \frac{(\bar{x} - \mu_0)^2}{\hat{s}^2}n \equiv F_{1, n-1}$$

siendo \hat{s}^2 la cuasivarianza, por lo que podemos buscar la región crítica a partir de alguna de esas expresiones; por ejemplo:

$$\text{RC} = \left[\left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s} : \sqrt{n}} \right| > t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \right]$$

que es la fórmula habitual empleada en el contraste t para una muestra.

Nótese que, cuando $n \rightarrow \infty$, $t_{n-1} \rightarrow N(0, 1)$, luego $-2 \ln \Lambda \rightarrow \chi_1^2 = \chi_{2-1}^2$ como se sigue del teorema.

Un caso particular del TRV para contrastar homoscedasticidad en distribuciones normales nos lleva al test de Bartlett.

Ejemplo 5. Sean $X_i \equiv N(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, \dots, I$ independientes. De cada población i se extrae una muestra aleatoria simple $\vec{X}_i = (X_{i1}, \dots, X_{in_i})$. Considérese el contraste $H_0 : \sigma_1^2 = \dots = \sigma_I^2$ frente a H_1 : “no todas las varianzas son iguales”.

Entonces

- sin restricciones,

$$L(\vec{x}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) = \prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \right)^{n_i} e^{-\sum_{i=1}^I \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$\begin{aligned} \sup_{\vec{\mu}, \vec{\sigma}} L(\vec{x}, \vec{\mu}, \vec{\sigma}) &= L(\vec{x}, \hat{\mu}_{1, \text{MV}}, \dots, \hat{\mu}_{I, \text{MV}}, \hat{\sigma}_{1, \text{MV}}, \dots, \hat{\sigma}_{I, \text{MV}}) \\ &= L(\vec{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_I, s_1, \dots, s_I) \end{aligned}$$

con

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n_i}$$

- bajo H_0 ,

$$L(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}}$$

donde $n = \sum n_i$.

$$\ln L(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma) = -\frac{n}{2}(\ln 2\pi + \ln \sigma^2) - \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^2}$$

$$0 = \frac{\partial \ln L(\vec{x}, \vec{\mu}, \sigma)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^4}$$

$$\frac{n}{2\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2}{2\sigma^4}$$

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \mu_i)^2$$

Respecto a las μ_i , la verosimilitud se maximiza con $\mu_i = \bar{x}_i$ y, por tanto,

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^I n_i s_i^2}{n}$$

luego el TRV en este contexto es:

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{L(\vec{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_I, s)}{L(\vec{x}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_I, s_1, \dots, s_I)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{2s^2}}}{\prod_{i=1}^I \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi s_i^2}}\right)^{n_i} e^{-\sum_{i=1}^I \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{2s_i^2}}} \\ &= \prod_{i=1}^I \left(\frac{s_i^2}{s^2}\right)^{\frac{n_i}{2}} \end{aligned}$$

con distribución asintótica bajo la hipótesis nula $\chi_{2I-(I+1)}^2 = \chi_{I-1}^2$:

$$-2 \ln \Lambda = -\sum_{i=1}^I n_i \ln s_i^2 + n \ln s^2 \xrightarrow{H_0} \chi_{I-1}^2$$

Una alternativa a este test es el **Test de Bartlett**, modificación del anterior para acelerar la convergencia asintótica. Se considera que la aproximación es válida si $n_i \geq 5$:

$$B = \frac{1}{c} \left(-\sum_{i=1}^I (n_i - 1) \ln(\hat{s}_i^2) + (n - I) \ln(\hat{s}^2) \right) \xrightarrow{H_0} \chi_{I-1}^2$$

con

$$c = 1 + \frac{1}{3(I-1)} \left(\sum_{i=1}^I \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n - I} \right)$$

El inconveniente de los dos test anteriores es que son muy sensibles a la falta de normalidad. Por ello, cuando esta restricción no se verifica suele emplearse el **Test de Levene** que efectúa un Anova sobre las variables $Z_{ij} = |X_{ij} - \bar{X}_i|$, cuya distribución no depende de μ_i y que tienen media dependiente de σ^2 . También existen modificaciones de este test que en vez de comparar cada variable con la media de sus grupo lo hacen con la mediana muestral de su grupo (test de Brown-Forsythe) o la media recortada. Estos estimadores son más robustos que la media muestral para estimar la esperanza (los valores poblacionales de μ , la mediana y la media recortada coinciden en una población normal).