

Teorema de Wilks (caso unidimensional): demostraciones detalladas

chati

18 de marzo de 2026

1. Planteamiento

Sean X_1, \dots, X_n i.i.d. con densidad $f(x; \theta)$, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$. Definimos

$$\ell_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(X_i; \theta), \quad \Lambda_n = 2(\ell_n(\hat{\theta}_n) - \ell_n(\theta_0)),$$

donde $\hat{\theta}_n$ es el estimador de máxima verosimilitud y $H_0 : \theta = \theta_0$.

Teorema 1 (Wilks, caso unidimensional). *Bajo condiciones regulares adecuadas,*

$$\Lambda_n \xrightarrow{d} \chi_1^2.$$

2. Hipótesis mínimas (formulación precisa)

Trabajamos bajo las siguientes condiciones locales alrededor de θ_0 :

(H1) (Diferenciabilidad cuadrática en media) Existe una función score $\dot{\ell}(x, \theta_0)$ tal que

$$\int \left(\sqrt{f(x; \theta)} - \sqrt{f(x; \theta_0)} - \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)\dot{\ell}(x, \theta_0)\sqrt{f(x; \theta_0)} \right)^2 dx = o((\theta - \theta_0)^2).$$

(H2) (Información finita y positiva)

$$I(\theta_0) = \mathbb{E}_{\theta_0}[\dot{\ell}(X, \theta_0)^2] \in (0, \infty).$$

(H3) (Consistencia del MLE)

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0.$$

(H4) (Regularidad local para segundas derivadas) Existe $\delta > 0$ tal que

$$\sup_{|\theta - \theta_0| < \delta} \left| \frac{1}{n} \ell_n''(\theta) - \mathbb{E} \ell_1''(\theta) \right| \xrightarrow{P} 0,$$

y $\theta \mapsto \mathbb{E} \ell_1''(\theta)$ es continua en θ_0 .

3. Estructura global de la demostración

Una expansión de Taylor y la ecuación del score implican

$$\Lambda_n = \frac{\ell'_n(\theta_0)^2}{-\ell''_n(\hat{\theta}_n)}(1 + o_P(1)).$$

Por tanto basta demostrar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}}\ell'_n(\theta_0) &\Rightarrow N(0, I(\theta_0)), \\ -\frac{1}{n}\ell''_n(\hat{\theta}_n) &\xrightarrow{P} I(\theta_0). \end{aligned}$$

La primera es un TCL estándar. La segunda requiere un argumento más fino.

4. Demostración A: LLN uniforme + consistencia

Sea

$$g(x, \theta) = -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log f(x; \theta).$$

Entonces

$$-\frac{1}{n}\ell''_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i, \theta).$$

Descomponemos

$$\frac{1}{n} \sum g(X_i, \hat{\theta}_n) - \mathbb{E}g(X, \theta_0) = A_n + B_n,$$

con

$$A_n = \frac{1}{n} \sum g(X_i, \hat{\theta}_n) - \mathbb{E}g(X, \hat{\theta}_n), \quad B_n = \mathbb{E}g(X, \hat{\theta}_n) - \mathbb{E}g(X, \theta_0).$$

Paso 1: A_n

Por (H4) (LLN uniforme local), $A_n \xrightarrow{P} 0$.

Paso 2: B_n

Por continuidad de $\theta \mapsto \mathbb{E}g(X, \theta)$ y (H3), $B_n \rightarrow 0$.

Conclusión

$$-\frac{1}{n}\ell''_n(\hat{\theta}_n) \xrightarrow{P} I(\theta_0).$$

5. Demostración B: vía LAN

Definimos $h = \sqrt{n}(\theta - \theta_0)$. Bajo (H1) se obtiene la expansión LAN:

$$\ell_n\left(\theta_0 + \frac{h}{\sqrt{n}}\right) - \ell_n(\theta_0) = h\Delta_n - \frac{1}{2}h^2I(\theta_0) + o_P(1),$$

con

$$\Delta_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\ell'_n(\theta_0) \Rightarrow N(0, I(\theta_0)).$$

El MLE maximiza esta expansión cuadrática:

$$\hat{h}_n = \frac{\Delta_n}{I(\theta_0)} + o_P(1).$$

Sustituyendo:

$$\Lambda_n = \frac{\Delta_n^2}{I(\theta_0)} + o_P(1) \Rightarrow \chi_1^2.$$

6. Comentarios

La demostración A depende de un LLN uniforme (equicontinuidad estocástica). La B usa estructura LAN y evita controlar derivadas segundas evaluadas en estimadores aleatorios.

A. Apéndice: formulación en lenguaje de Le Cam

Sea $\mathcal{E}_n = \{P_\theta^n : \theta \in \Theta\}$. Bajo (H1)–(H2), la familia es LAN en θ_0 con experimento límite gaussiano:

$$\mathcal{E} : \{N(hI(\theta_0), I(\theta_0)) : h \in \mathbb{R}\}.$$

El estadístico de razón de verosimilitudes converge al correspondiente en el experimento límite, que es:

$$\frac{Z^2}{I(\theta_0)}, \quad Z \sim N(0, I(\theta_0)).$$

Por el tercer lema de Le Cam, se obtiene la convergencia a χ_1^2 .

B. Referencias

- van der Vaart (1998), *Asymptotic Statistics*.
- van der Vaart & Wellner (1996), *Weak Convergence and Empirical Processes*.
- Ferguson (1996), *A Course in Large Sample Theory*.
- Lehmann & Romano (2005), *Testing Statistical Hypotheses*.