# Método de *Diferencia Honestamente Significativa* de Tukey (Tiuki)

22 de marzo de 2022

## 1. Recorrido

Sean una muestra $X_1$, ..., $X_n$ obtenida de la población $X$. Se define su recorrido (o rango) como

$$R = \max_i X_i - \min_i X_i = X_{(n)} - X_{(1)}$$

## 2. Distribución del recorrido estudentizado

Si $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ y $Y \hookrightarrow \chi^2_r$ independiente de $X_i$, entonces

$$\frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{\sqrt{Y/r}} \hookrightarrow Q_{n,r}$$

En `R` se usa `ptukey` para la función de distribución y `qtukey` para la función cuantil de $Q_{n,r}$.

## 3. Varias muestras

Sean las $q$ poblaciones homoscedásticas independientes $X_1$, ..., $X_q$ con $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma)$. De cada población $X_i$ se extrae una muestra $\vec{X_i} = (X_1, ..., X_{n_i})$.

Sea el estimador de la varianza intrapoblacional

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_i (n_i - 1)\hat{S}_i^2}{n - q} = \frac{\sum_i (n_i - 1)\frac{\sum_j (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{n_i - 1}}{n - q}$$

con $n = \sum_i n_i$, del que se sabe

$$\frac{(n-q)\hat{S}^2}{\sigma^2} \hookrightarrow \chi^2_{n-q}$$

Sea (1) el índice de la muestra con media muestral más baja y $(q)$ el de la más alta. Como cada $\bar{X}_i$ es independiente de cada $\hat{S}_i^2$ y aquéllos lo son entre sí, entonces $\hat{S}^2$ es independiente de todos aquéllos y

$$\frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu_{(q)}}{\sigma/\sqrt{n_{(q)}}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu_{(1)}}{\sigma/\sqrt{n_{(1)}}}}{\sqrt{\frac{\hat{S}^2}{\sigma^2}}} = \frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu_{(q)}}{1/\sqrt{n_{(q)}}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu_{(1)}}{1/\sqrt{n_{(1)}}}}{\hat{S}} \hookrightarrow Q_{n,r}$$

Bajo $H_0$ del ANOVA, $\forall i\ \mu_i = \mu$ y

$$\frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu_{(q)}}{1/\sqrt{n_{(q)}}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu_{(1)}}{1/\sqrt{n_{(1)}}}}{\hat{S}} = \frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu}{1/\sqrt{n_{(q)}}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu}{1/\sqrt{n_{(1)}}}}{\hat{S}} \hookrightarrow Q_{n,r}$$

# 4. Varias muestras equilibradas

Si el modelo es equilibrado, $n_i = m = n/q\ \forall i$ y

$$\frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu}{1/\sqrt{n_{(q)}}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu}{1/\sqrt{n_{(1)}}}}{\hat{S}} = \frac{\frac{\bar{X}_{(q)}-\mu}{1/\sqrt{m}} - \frac{\bar{X}_{(1)}-\mu}{1/\sqrt{m}}}{\hat{S}} = \frac{\bar{X}_{(q)} - \bar{X}_{(1)}}{\hat{S}/\sqrt{m}} \hookrightarrow Q_{n,r} \qquad (1)$$

La diferencia entre las medias más alejadas acota superiormente el valor absoluto de la diferencia entre cualquier par de medias:

$$\Pr\left[\frac{\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right|}{\hat{S}/\sqrt{m}} > k\right] \leq \Pr\left[\frac{\bar{X}_{(q)} - \bar{X}_{(1)}}{\hat{S}/\sqrt{m}} > k\right] \qquad (2)$$

por lo que haciendo $k$ el cuantil de orden $1-\alpha$ de $Q_{q,n-q}$ se definen regiones críticas a nivel $\alpha$ para los múltiples contrastes $H_0^{ij}\colon \mu_i = \mu_j$, $H_1^{ij}\colon \mu_i \neq \mu_j$.

# 5. Varias muestras desequilibradas

La última fracción de (1) puede escribirse así:

$$\frac{\bar{X}_{(q)} - \bar{X}_{(1)}}{\hat{S}/\sqrt{m}} = \frac{\bar{X}_{(q)} - \bar{X}_{(1)}}{\sqrt{\frac{\hat{S}^2}{2}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right)}}$$

lo que recuerda a la expresión derivada de la diferencia de medias:

$$\frac{\bar{X}_i - \bar{X}_j}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} \overset{H_0}{\hookrightarrow} t_{n-q}$$

En caso de muestras desequilibradas, con $n_i \neq n_j\ \exists i, j$, se emplea una expresión aproximada de (2):

$$\Pr\left[\frac{\left|\bar{X}_i - \bar{X}_j\right|}{\sqrt{\frac{\hat{S}^2}{2}\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}} > k\right] \lesssim 1 - \alpha$$

## 6. Ejemplo en R

```
> cw <- chickwts
> levels(cw$feed) <- abbreviate(levels(cw$feed),2)
> a <- aov (weight ~ feed, cw)
> t <- TukeyHSD (a)
```

Tabla de Tukey:

```
> t

  Tukey multiple comparisons of means
    95% family-wise confidence level

Fit: aov(formula = weight ~ feed, data = cw)

$feed
             diff         lwr       upr     p adj
hr-cs -163.383333 -232.346876 -94.41979 0.0000000
ln-cs -104.833333 -170.587491 -39.07918 0.0002100
mt-cs  -46.674242 -113.906207  20.55772 0.3324584
sy-cs  -77.154762 -140.517054 -13.79247 0.0083653
sn-cs    5.333333  -60.420825  71.08749 0.9998902
ln-hr   58.550000  -10.413543 127.51354 0.1413329
mt-hr  116.709091   46.335105 187.08308 0.0001062
sy-hr   86.228571   19.541684 152.91546 0.0042167
sn-hr  168.716667   99.753124 237.68021 0.0000000
mt-ln   58.159091   -9.072873 125.39106 0.1276965
sy-ln   27.678571  -35.683721  91.04086 0.7932853
sn-ln  110.166667   44.412509 175.92082 0.0000884
sy-mt  -30.480519  -95.375109  34.41407 0.7391356
sn-mt   52.007576  -15.224388 119.23954 0.2206962
sn-sy   82.488095   19.125803 145.85039 0.0038845
```

Sus elementos se calculan así:

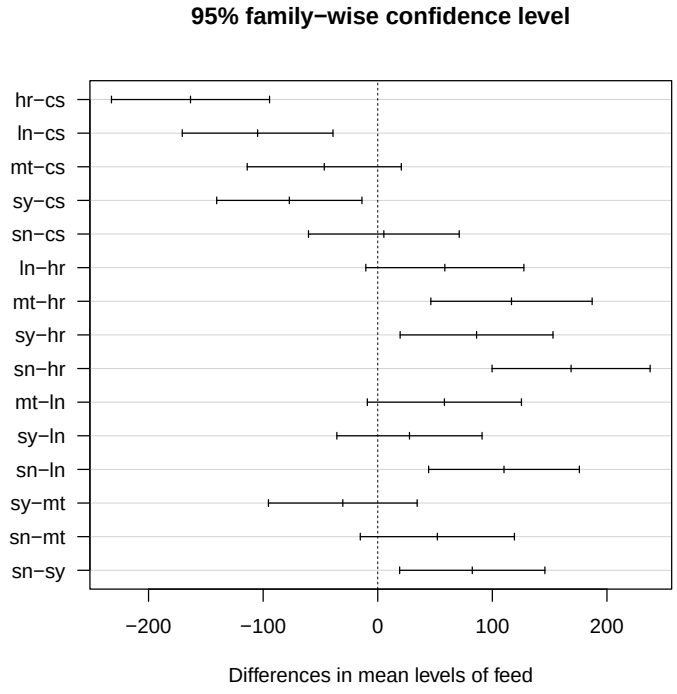
```
> i <- "ln" # segunda fila de la tabla, por ejemplo
> j <- "cs"
> n <- table (cw$feed) ; q <- length(n) ; N <- sum(n)
> CME <- summary(a)[[1]]["Residuals","Mean Sq"]
> Xi <- mean (cw$weight [cw$feed == i])
> Xj <- mean (cw$weight [cw$feed == j])
> alfa <- 0.05
> dif <- Xi-Xj
> den <- as.numeric (sqrt (CME/2 * (1/n[i] + 1/n[j])))
> ## as.numeric para quitar etiqueta
> int <- setNames (dif + c(-1,1) * den * qtukey (1-alfa, q, N-q),
```

```
+                   c ("lwr", "upr"))
> c (diff = round (dif, 6),
+    int,
+    "p adj" = round (1 - ptukey (abs(dif)/den, q, N-q), 7))

      diff        lwr        upr      p adj
-104.83333 -170.58749  -39.07918    0.00021
```

Representación gráfica de los intervalos (¿está el cero incluido en el intervalo?):

```
> par (las = 1) # etiquetas horizontales en el eje Y
> plot (t)
```




# 7. Simulación

Comparación de la tasa de rechazos usando ANOVA y Tukey:

```
> mu <- c (0, 0, 0.2) ; q <- length(mu)
> m <- 100 ; g <- factor (rep (1:q, each=m))
> table (data.frame (t (replicate (10000, {
+     x <- unlist (lapply (mu,
```

```
+                           function (mui) rnorm (m, mui)))
+     a <- aov (x ~ g)
+     H1anova <- summary(a) [[1]] ["g", "Pr(>F)"] < alfa
+     H1tukey <- any (TukeyHSD(a)$g[,"p adj"] < alfa)
+     c (H1anova=H1anova, H1tukey=H1tukey)
+ }))))
```

```
       H1tukey
H1anova FALSE TRUE
  FALSE  6974  129
  TRUE    180 2717
```