Inferencia Estadística

Convocatoria Extraordinaria

30 de Junio de 2025

Instrucciones

- Primera parte: TEORÍA. Ordenador apagado. Tienes hasta una hora para resolverla y entregar los folios con tu respuesta.
- Segunda parte: PROBLEMAS. En cuanto entregues la teoría, podrás encender el ordenador exclusivamente para usar R y acceder al campus virtual. No hay una "tarea" en el campus virtual para subir documentos. Has de entregar todas tus respuestas en papel: para un gráfico, esbózalo a mano dejando claro lo que quieras destacar; para código fuente, escríbelo con la mayor precisión posible. Has de entregar los folios en dos bloques separados: problema 1; problema 2.
- Justifica todas las respuestas.

Teoría (4 puntos)

1. **(1 punto)** Se pidió a una IA que resolviese el siguiente problema:

   Sea X una variable aleatoria con densidad $U(-\theta, \theta+3)$ y $\theta > 0$ de la que se extrae una muestra de tamaño n. Calcula el estimador de theta por el método de los meomentos.

   Comenta si la solución es correcta o contiene errores y calcula el estimador máximo-verosímil. (La salida ha sido retocada para ahorrar espacio.)

   SOLUCIÓN DE LA IA.

   La función de densidad de X es uniforme en el intervalo $(-\theta, \theta+3)$:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta+3} & \text{si } -\theta \leq x \leq \theta+3 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   Estimador por Momentos (EM)

   La media poblacional es constante:

$$E[X] = \frac{(-\theta)+(\theta+3)}{2} = \frac{3}{2}$$

   y no depende de θ. Usamos el segundo momento. La varianza poblacional es:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(2\theta+3)^2}{12}$$

   Entonces:

$$E[X^2] = \mathrm{Var}(X) + (E[X])^2 = \frac{(2\theta+3)^2}{12} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{(2\theta+3)^2}{12} + \frac{9}{4}$$

   Igualamos con el segundo momento muestral $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$:

$$\frac{(2\theta+3)^2}{12} + \frac{9}{4} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

   Despejando θ:

$$\frac{(2\theta+3)^2}{12} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{9}{4}$$

$$(2\theta+3)^2 = 12\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{9}{4}\right) = 12\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 27$$

$$2\theta = \left(\sqrt{12\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 27}\right) - 3$$

$$\hat{\theta}_{\mathrm{MM}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{12\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 27} - 3\right)$$

2. **(1 punto)** Explica en qué consiste el método bootstrap paramétrico para calcular intervalos de confianza.

3. **(1 punto)** Enuncia y demuestra el lema de Neyman-Pearson para test puros.

4. **(1 punto)** Sea una variable aleatoria con distribución normal $X \equiv N(\mu, \sigma)$, con sigma conocido, del que se extrae una muestra aleatoria simple $(x_1, ..., x_n)$ para contrastar la hipótesis $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$ al nivel de significación α. Calcula el valor de n necesario para obtener una potencia $1-\beta$ cuando $\mu = \mu_0 + d$, con $d > 0$.

Problema 1 (3 puntos)

La muestra (0, 0, 0, 3, 0, 9, 0, 3, 2, 5) de la variable "número de fracasos antes del primer éxito de cierto dron militar en fase de pruebas" sigue una distribución geométrica con función de probabilidad $f(x \mid p) = (1-p)^x \cdot p$, esperanza $(1-p)/p$ y varianza $(1-p)/p^2$.

1. (0,75 **puntos)** Halla un estadístico suficiente minimal para p.

2. (0,75 **puntos)** Halla el estimador máximo-verosímil de p.

3. (0,75 **puntos)** Halla un intervalo de confianza a nivel 0,95 para p.

4. (0,75 **puntos)** Contrasta $H_0 : p = 1/2$ frente a $H_1 : p \neq 1/2$ a nivel de significación 0,05.

Problema 2 (3 puntos)

Con la llegada del verano, la heladería "La Polar" se ha propuesto identificar cuál de sus productos puede considerarse el helado ideal. Para ello, y en consonancia con los principios del método científico, han diseñado un experimento controlado en el que se ha recopilado información sobre las preferencias de un grupo representativo de clientes respecto a tres de sus helados más emblemáticos. Los niveles de satisfacción, registrados en una escala de 0 a 10, se encuentran organizados y disponibles en el fichero 'LaPolar.RData'. Basándote en los datos recogidos y asumiendo independencia entre las valoraciones de los distintos clientes, responde a las siguientes preguntas considerando un nivel de significación $\alpha = 0{,}1$:

a) **(1 punto)** Analiza si la satisfacción, para cada sabor, sigue aproximadamente una distribución normal con la misma varianza. Realiza un estudio descriptivo (tanto numérico como gráfico) e inferencial.

b) **(1 punto)** Estudia si hay diferencias en la satisfacción del cliente en función del sabor del helado. Apóyate en un resumen descriptivo previo (tanto numérico como gráfico), basa tus conclusiones en los resultados de un contraste de hipótesis y concluye con un estudio a posteriori.

c) **(1 punto)** Analiza si la satisfacción se puede explicar como si proviniera de tres grupos diferentes, cada uno con la misma probabilidad de ocurrir, y siguiendo cada grupo una distribución normal con varianza común de 1 y con medias 5, 6 y 7. Determina la función de distribución y de densidad resultantes y basa tus conclusiones en un gráfico y en un contraste de hipótesis adecuados.