Ejercicios de repaso inicial

Distribuciones discretas

Facultad de Ciencias

Universidad Oviedo

Curso 2021-22

1. Código Morse

Un sistema de comunicación que transmite en código Morse cambia el 10 % de los puntos en rayas y el 8 % de las rayas en puntos. Además se sabe que el 40 % de las señales enviadas son puntos.

a) Calcula la probabilidad de recibir un símbolo erróneo.

b) Si un mensaje está formado por cien caracteres, ¿cuál es la probabilidad de que contenga al menos tres errores?

1. Código Morse

Un sistema de comunicación que transmite en código Morse cambia el 10 % de los puntos en rayas y el 8 % de las rayas en puntos. Además se sabe que el 40 % de las señales enviadas son puntos.

a) Calcula la probabilidad de recibir un símbolo erróneo.

b) Si un mensaje está formado por cien caracteres, ¿cuál es la probabilidad de que contenga al menos tres errores?

$$P\,[\text{raya} \mid \text{punto}] = P\,[- \mid \cdot] = 0'1$$

$$P\,[\text{punto} \mid \text{raya}] = P\,[\cdot \mid -] = 0'08$$

$$P\,[\text{punto}] = P\,[\cdot] = 0'4$$

1a. Código Morse: probabilidad de error

$$P\,[\text{raya}\,|\,\text{punto}] = P\,[-\,|\,\cdot] = 0'1$$

$$P\,[\text{punto}\,|\,\text{raya}] = P\,[\cdot\,|\,-] = 0'08$$

$$P\,[\text{punto}] = P\,[\cdot] = 0'4$$

a)

$$P\,[\text{error}] \quad =$$

1a. Código Morse: probabilidad de error

$$P[\text{raya} \mid \text{punto}] = P[- \mid \cdot] = 0'1$$

$$P[\text{punto} \mid \text{raya}] = P[\cdot \mid -] = 0'08$$

$$P[\text{punto}] = P[\cdot] = 0'4$$

a)

$$\begin{aligned} P[\text{error}] &= P[\text{enviar punto y recibir raya}] \\ &+ P[\text{enviar raya y recibir punto}] \end{aligned}$$

1a. Código Morse: probabilidad de error

$$P[\text{raya} \mid \text{punto}] = P[- \mid \cdot] = 0'1$$

$$P[\text{punto} \mid \text{raya}] = P[\cdot \mid -] = 0'08$$

$$P[\text{punto}] = P[\cdot] = 0'4$$

a)

$$\begin{aligned} P[\text{error}] &= P[\text{enviar punto y recibir raya}] \\ &+ P[\text{enviar raya y recibir punto}] \\ &= P[- \mid \cdot]\,P[\cdot] + P[\cdot \mid -]\,P[-] \end{aligned}$$

1a. Código Morse: probabilidad de error

$$P[\text{raya} \mid \text{punto}] = P[- \mid \cdot] = 0'1$$

$$P[\text{punto} \mid \text{raya}] = P[\cdot \mid -] = 0'08$$

$$P[\text{punto}] = P[\cdot] = 0'4$$

a)

$$\begin{aligned}
P[\text{error}] &= P[\text{enviar punto y recibir raya}] \\
&+ P[\text{enviar raya y recibir punto}] \\
&= P[- \mid \cdot]\,P[\cdot] + P[\cdot \mid -]\,P[-] \\
&= 0'1 \times 0'4 + 0'08 \times 0'6 = 0'088
\end{aligned}$$

1b. Código Morse: al menos 3 errores en 100 caracteres

Sea X el número de errores al enviar cien caracteres.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cada envío: error o acierto}\\ \text{Condiciones experimentales constantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim$$

1b. Código Morse: al menos 3 errores en 100 caracteres

Sea X el número de errores al enviar cien caracteres.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cada envío: error o acierto}\\ \text{Condiciones experimentales constantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim \mathcal{B}(100, 0'088)$$

1b. Código Morse: al menos 3 errores en 100 caracteres

Sea X el número de errores al enviar cien caracteres.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Cada envío: error o acierto}\\ \text{Condiciones experimentales constantes}\end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim \mathcal{B}(100, 0'088)$$

$$\begin{aligned}
P[X \geqslant 3] &= \sum_{i=3}^{100} P[X = i] \\
&= \texttt{sum (dbinom (3:100, 100, 0.088))} \\
\text{(otra forma)} &= 1 - P[X \leqslant 2] \\
&= \texttt{1 - pbinom (2, 100, 0.088)} \\
&= 1 - 0'005666899 = 0'9943331
\end{aligned}$$

2. Control de calidad

La política del Departamento de Control de Calidad de una empresa consiste en revisar el proceso de fabricación si al menos el 5 % de los 15 componentes revisados semanalmente son defectuosos.

a) Sabiendo que en condiciones normales un componente es defectuoso con probabilidad 0'01, calcula la probabilidad de revisar por error el proceso de fabricación.

b) Si en un determinado momento la probabilidad de defectuoso es $p = 0'03$, calcula la probabilidad de que el proceso no sea revisado.

2. Control de calidad

La política del Departamento de Control de Calidad de una empresa consiste en revisar el proceso de fabricación si al menos el 5 % de los 15 componentes revisados semanalmente son defectuosos.

a) Sabiendo que en condiciones normales un componente es defectuoso con probabilidad 0'01, calcula la probabilidad de revisar por error el proceso de fabricación.

b) Si en un determinado momento la probabilidad de defectuoso es $p = 0'03$, calcula la probabilidad de que el proceso no sea revisado.

$$\mathrm{P}\left[\text{defectuoso en condiciones normales}\right] = 0'01$$

2. Control de calidad

La política del Departamento de Control de Calidad de una empresa consiste en revisar el proceso de fabricación si al menos el 5 % de los 15 componentes revisados semanalmente son defectuosos.

a) Sabiendo que en condiciones normales un componente es defectuoso con probabilidad 0’01, calcula la probabilidad de revisar por error el proceso de fabricación.
b) Si en un determinado momento la probabilidad de defectuoso es $p = 0'03$, calcula la probabilidad de que el proceso no sea revisado.

$$P\,[\text{defectuoso en condiciones normales}] = 0'01$$

$$X = \text{“número de defectuosos entre los 15 que se revisan”}$$

$$X \sim$$

2. Control de calidad

La política del Departamento de Control de Calidad de una empresa consiste en revisar el proceso de fabricación si al menos el 5 % de los 15 componentes revisados semanalmente son defectuosos.

a) Sabiendo que en condiciones normales un componente es defectuoso con probabilidad 0'01, calcula la probabilidad de revisar por error el proceso de fabricación.

b) Si en un determinado momento la probabilidad de defectuoso es $p = 0'03$, calcula la probabilidad de que el proceso no sea revisado.

$$\text{P}\left[\text{defectuoso en condiciones normales}\right] = 0'01$$

$$\text{X} = \text{“número de defectuosos entre los 15 que se revisan”}$$

$$\text{X} \sim \mathcal{B}\left(15, 0'01\right)$$

2a. Control de calidad: prob. revisar por error

$$\text{“por error”} \Longrightarrow \text{revisar estando bien el proceso}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{P}\left[\text{defectuoso}\right] = 0\text{'}01 \;\; (\text{lo normal})$$

$$[\text{revisar}] \quad = \quad [\text{al menos el } 5\,\% \text{ de los } 15 \text{ son defectuosos}]$$

2a. Control de calidad: prob. revisar por error

$$\text{“por error”} \Longrightarrow \text{revisar estando bien el proceso}$$

$$\Longrightarrow P\,[\text{defectuoso}] = 0'01 \;\; (\text{lo normal})$$

$$\begin{aligned}[\text{revisar}] &= [\text{al menos el } 5\,\% \text{ de los } 15 \text{ son defectuosos}] \\ &= [X \geqslant 0'05 \times 15] \\ &= [X \geqslant 0'75]\end{aligned}$$

2a. Control de calidad: prob. revisar por error

$$\text{“por error”} \Longrightarrow \text{revisar estando bien el proceso}$$

$$\Longrightarrow P[\text{defectuoso}] = 0'01 \ \text{(lo normal)}$$

$$\begin{aligned}
[\text{revisar}] &= [\text{al menos el } 5\,\% \text{ de los } 15 \text{ son defectuosos}] \\
&= [X \geqslant 0'05 \times 15] \\
&= [X \geqslant 0'75] \\
&= [X \geqslant 1]
\end{aligned}$$

$$P[\text{revisar}] = P[X \geqslant 1]$$

2a. Control de calidad: prob. revisar por error

$$\text{“por error”} \Longrightarrow \text{revisar estando bien el proceso}$$

$$\Longrightarrow P[\text{defectuoso}] = 0'01 \;\; (\text{lo normal})$$

$$\begin{aligned}
[\text{revisar}] &= [\text{al menos el } 5\,\% \text{ de los } 15 \text{ son defectuosos}] \\
&= [X \geqslant 0'05 \times 15] \\
&= [X \geqslant 0'75] \\
&= [X \geqslant 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P[\text{revisar}] &= P[X \geqslant 1] \\
&= 1 - P[X = 0]
\end{aligned}$$

2a. Control de calidad: prob. revisar por error

$$\text{“por error”} \Longrightarrow \text{revisar estando bien el proceso}$$

$$\Longrightarrow P\,[\text{defectuoso}] = 0'01 \;\; (\text{lo normal})$$

$$\begin{aligned}
[\text{revisar}] &= [\text{al menos el } 5\,\% \text{ de los } 15 \text{ son defectuosos}] \\
&= [X \geqslant 0'05 \times 15] \\
&= [X \geqslant 0'75] \\
&= [X \geqslant 1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P\,[\text{revisar}] &= P\,[X \geqslant 1] \\
&= 1 - P\,[X = 0] \\
&= 1 - 0'99^{15} \\
&= 1 - 0'8600584 \\
&= 0'1399416
\end{aligned}$$

3. Test

Un test consta de 5 preguntas, con dos respuestas cada una, que se puntúan de la siguiente manera: si se acierta una pregunta se otorga 1 punto y, si se falla, se quitan 0'25 puntos. Suponiendo que una persona responda al azar y que X represente la puntuación final obtenida, calcula:

a) Los valores que puede tomar X y su función de probabilidad asociada.

b) La probabilidad de que X sea positiva.

3. Test

Un test consta de 5 preguntas, con dos respuestas cada una, que se puntúan de la siguiente manera: si se acierta una pregunta se otorga 1 punto y, si se falla, se quitan 0'25 puntos. Suponiendo que una persona responda al azar y que X represente la puntuación final obtenida, calcula:

a) Los valores que puede tomar X y su función de probabilidad asociada.

$$X = Y - 0'25(5 - Y) \text{ con } Y \sim \mathcal{B}(5, 0'5)$$

```
> soporteY <- 0:5
> soporteX <- soporteY-0.25*(5-soporteY)
> rbind (soporteX, prob = prob <- dbinom(soporteY,5,.5))
             [,1]    [,2]   [,3]   [,4]    [,5]    [,6]
soporteX -1.25000 0.00000 1.2500 2.5000 3.75000 5.00000
prob      0.03125 0.15625 0.3125 0.3125 0.15625 0.03125
```

3. Test

Un test consta de 5 preguntas, con dos respuestas cada una, que se puntúan de la siguiente manera: si se acierta una pregunta se otorga 1 punto y, si se falla, se quitan 0'25 puntos. Suponiendo que una persona responda al azar y que X represente la puntuación final obtenida, calcula:

a) Los valores que puede tomar X y su función de probabilidad asociada.

```
soporteX -1.25000 0.00000 1.2500 2.5000 3.75000 5.00000
prob      0.03125 0.15625 0.3125 0.3125 0.15625 0.03125
```

b) La probabilidad de que X sea positiva.

```
> sum (prob [soporteX > 0])
[1] 0.8125
```

4. Móviles

El número de teléfonos móviles por familia se puede considerar como una variable aleatoria X con la siguiente distribución:

$$P[X = k] = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 0 \\ c\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

donde $\lambda = \ln 2$.

1. Calcula el valor de la constante c.
2. Calcula el número medio de teléfonos móviles por familia.

4. Móviles

El número de teléfonos móviles por familia se puede considerar como una variable aleatoria X con la siguiente distribución:

$$\mathrm{P}[\mathrm{X} = k] = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 0 \\ c\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} & k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

donde $\lambda = \ln 2$.

1. Calcula el valor de la constante c.

$$1 = \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} c\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{3} + c\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{3} + ce^{\lambda} = \frac{1}{3} + 2c \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

2. Calcula el número medio de teléfonos móviles por familia.

4. Móviles

El número de teléfonos móviles por familia se puede considerar como una variable aleatoria X con la siguiente distribución:

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{X}=k\right]=\begin{cases}\frac{1}{3} & k=0\\ c\,\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} & k=1,2,3,\ldots\end{cases}$$

donde $\lambda = \ln 2$.

1. Calcula el valor de la constante c. $c = 1/3$
2. Calcula el número medio de teléfonos móviles por familia.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\left[\mathrm{X}\right] &= \frac{1}{3}\mathcal{E}\left[\mathrm{X}\mid\mathrm{X}=0\right]+\frac{2}{3}\mathcal{E}\left[\mathrm{X}\mid\mathrm{X}>0\right]\\ &= 0+\frac{2}{3}\mathcal{E}\left[\mathrm{X}\mid\mathrm{X}>0\right]=\frac{2}{3}(1+\ln 2)\end{aligned}$$

pues $\Big((\mathrm{X}-1)\mid\mathrm{X}>0\Big)\sim\mathrm{Poisson}\,(\lambda)$.

5. Quiosco

La demanda semanal de una revista, en un quiosco, está representada por $D = 4 + X$, donde X es una binomial con parámetros $n = 4$ y $p = 0'5$. El precio de venta de cada ejemplar es de 5 € y el costo para el vendedor es de 4 €. Además los ejemplares pedidos y no vendidos no pueden ser devueltos.

a) ¿Qué significado tienen los términos 4 y X en la expresión de la demanda?

b) Calcula la distribución de probabilidad de D, su media y su varianza.

c) Cierta semana el propietario del quiosco encargó seis ejemplares. Calcula la distribución de probabilidad de la variable *beneficio neto*, su media y su varianza.

d) Determina qué número de ejemplares debe encargar el propietario para maximizar el beneficio esperado.

5a. Quiosco: significado de los términos

5a. Quiosco: significado de los términos

- 4: demanda fija (clientes habituales).

5a. Quiosco: significado de los términos

- 4: demanda fija (clientes habituales).
- X: demanda aleatoria, de 0 a 4 ejemplares.

5b. Quiosco: distro de D, $\mathcal{E}[D]$, $\mathrm{Var}[D]$

- D toma valores 4, 5, 6, 7, 8.

5b. Quiosco: distro de D, $\mathcal{E}[D]$, $\mathrm{Var}[D]$

- D toma valores 4, 5, 6, 7, 8.
- $P[D = k] = P[X = k - 4] = P[\mathcal{B}(4, 0'5) = k - 4] = \binom{4}{k-4} 0'5^4$

5b. Quiosco: distro de D, $\mathcal{E}[\mathrm{D}]$, $\mathrm{Var}[\mathrm{D}]$

- D toma valores 4, 5, 6, 7, 8.
- $\mathrm{P}[\mathrm{D}=k]=\mathrm{P}[\mathrm{X}=k-4]=\mathrm{P}[\mathcal{B}(4,0'5)=k-4]=\binom{4}{k-4}0'5^4$
- $\mathcal{E}[\mathrm{D}]=\mathcal{E}[4+\mathrm{X}]=4+\mathcal{E}[\mathrm{X}]=4+\mathcal{E}[\mathcal{B}(4,0'5)]=4+4\times 0'5=6$

5b. Quiosco: distro de D, $\mathcal{E}[D]$, $\text{Var}[D]$

- D toma valores 4, 5, 6, 7, 8.
- $P[D = k] = P[X = k-4] = P[\mathcal{B}(4, 0'5) = k-4] = \binom{4}{k-4} 0'5^4$
- $\mathcal{E}[D] = \mathcal{E}[4 + X] = 4 + \mathcal{E}[X] = 4 + \mathcal{E}[\mathcal{B}(4, 0'5)] = 4 + 4 \times 0'5 = 6$
- $\text{Var}[D] = \text{Var}[4 + X] = \text{Var}[X] = \text{Var}[\mathcal{B}(4, 0'5)] =$
  $4 \times 0'5 \times 0'5 = 1$

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V = 4] = P[D = 4] = P[X = 0] = 0'5^4$

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V = 4] = P[D = 4] = P[X = 0] = 0'5^4$
- $P[V = 5] = P[D = 5] = P[X = 1] = 4 \cdot 0'5^4$

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\Longrightarrow$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V = 4] = P[D = 4] = P[X = 0] = 0'5^4$
- $P[V = 5] = P[D = 5] = P[X = 1] = 4 \cdot 0'5^4$
- $P[V = 6] = P[D \in \{6, 7, 8\}] = P[X > 1] = 11 \cdot 0'5^4$

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\Longrightarrow$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V = 4] = P[D = 4] = P[X = 0] = 0'5^4$
- $P[V = 5] = P[D = 5] = P[X = 1] = 4 \cdot 0'5^4$
- $P[V = 6] = P[D \in \{6, 7, 8\}] = P[X > 1] = 11 \cdot 0'5^4$
- sea $B = 5 \cdot V - 4 \cdot 6$ el beneficio neto

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V=4] = P[D=4] = P[X=0] = 0'5^4$
- $P[V=5] = P[D=5] = P[X=1] = 4 \cdot 0'5^4$
- $P[V=6] = P[D \in \{6,7,8\}] = P[X>1] = 11 \cdot 0'5^4$
- sea $B = 5 \cdot V - 4 \cdot 6$ el beneficio neto
- B toma valores −4, 1 y 6 con probabilidades respectivas a las de V

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $\mathrm{P}[\mathrm{V}=4]=\mathrm{P}[\mathrm{D}=4]=\mathrm{P}[\mathrm{X}=0]=0'5^4$
- $\mathrm{P}[\mathrm{V}=5]=\mathrm{P}[\mathrm{D}=5]=\mathrm{P}[\mathrm{X}=1]=4\cdot 0'5^4$
- $\mathrm{P}[\mathrm{V}=6]=\mathrm{P}[\mathrm{D}\in\{6,7,8\}]=\mathrm{P}[\mathrm{X}>1]=11\cdot 0'5^4$
- sea $\mathrm{B}=5\cdot\mathrm{V}-4\cdot 6$ el beneficio neto
- B toma valores -4, 1 y 6 con probabilidades respectivas a las de V
- $\mathcal{E}[\mathrm{B}]=-4\cdot 0'5^4+1\cdot 4\cdot 0'5^4+6\cdot 11\cdot 0'5^4=\frac{66}{16}\approx 4'12$

5c. Quiosco: beneficio neto

- sea V el número de ejemplares vendidos
- 6 disponibles $\implies$ V toma valores 4, 5 y 6.
- $P[V = 4] = P[D = 4] = P[X = 0] = 0'5^4$
- $P[V = 5] = P[D = 5] = P[X = 1] = 4 \cdot 0'5^4$
- $P[V = 6] = P[D \in \{6,7,8\}] = P[X > 1] = 11 \cdot 0'5^4$
- sea $B = 5 \cdot V - 4 \cdot 6$ el beneficio neto
- B toma valores -4, 1 y 6 con probabilidades respectivas a las de V
- $\mathcal{E}[B] = -4 \cdot 0'5^4 + 1 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 11 \cdot 0'5^4 = \frac{66}{16} \approx 4'12$
- $\mathrm{Var}[D] = (-4)^2 \cdot 0'5^4 + 1^2 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6^2 \cdot 11 \cdot 0'5^4 - \mathcal{E}[B]^2 \approx 9'03$

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{\mathrm{D}, n\}$.

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\min\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4,5,6,7,8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)
- $n = 5 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 15 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 5 = \frac{75}{16} \approx 4'69$

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\min\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)
- $n = 5 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 15 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 5 = \frac{75}{16} \approx 4'69$
- $n = 6 \implies \mathcal{E}[B_n] \approx 4'12$ (apartado anterior)

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)
- $n = 5 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 15 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 5 = \frac{75}{16} \approx 4'69$
- $n = 6 \implies \mathcal{E}[B_n] \approx 4'12$ (apartado anterior)
- $n = 7 \implies \mathcal{E}[B_n] =$ $5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 6 \cdot 0'5^4 + 7 \cdot 5 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 7 = \frac{27}{16} \approx 1'69$

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)
- $n = 5 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 15 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 5 = \frac{75}{16} \approx 4'69$
- $n = 6 \implies \mathcal{E}[B_n] \approx 4'12$ (apartado anterior)
- $n = 7 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 6 \cdot 0'5^4 + 7 \cdot 5 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 7 = \frac{27}{16} \approx 1'69$
- $n = 8 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 6 \cdot 0'5^4 + 7 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 8 \cdot 1 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 8 = -2$

5d. Quiosco: maximizar beneficio

- sea $n \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$ el número de ejemplares encargados
- sea V el número de ejemplares vendidos
- n disponibles $\implies$ V toma valores desde 4 hasta $\text{mín}\{D, n\}$.
- sea $B_n = 5 \cdot V - 4 \cdot n$ el beneficio neto
- $n = 4 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 4 = 4$ (se venden los 4 ejemplares)
- $n = 5 \implies \mathcal{E}[B_n] = 5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 15 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 5 = \frac{75}{16} \approx 4'69$
- $n = 6 \implies \mathcal{E}[B_n] \approx 4'12$ (apartado anterior)
- $n = 7 \implies \mathcal{E}[B_n] =$ $5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 6 \cdot 0'5^4 + 7 \cdot 5 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 7 = \frac{27}{16} \approx 1'69$
- $n = 8 \implies \mathcal{E}[B_n] =$ $5 \cdot (4 \cdot 0'5^4 + 5 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 6 \cdot 6 \cdot 0'5^4 + 7 \cdot 4 \cdot 0'5^4 + 8 \cdot 1 \cdot 0'5^4) - 4 \cdot 8 = -2$
- $n = 5$ da el resultado óptimo

6. Vidrio

Una fábrica de vidrio ha instalado un sistema automático de visión artificial para detectar la presencia de impurezas en las planchas de vidrio que produce. Se sabe que los defectos del vidrio aparecen de manera independiente y por causas atribuidas al azar. El número medio de impurezas por cada plancha es 1.

a) Determina el modelo de distribución que representa el número de defectos por plancha.

b) Si una plancha se rechaza cuando presenta 4 ó más defectos, ¿cuál es la probabilidad de que una plancha elegida al azar sea rechazada?

c) Calcula la probabilidad de que sea necesario revisar diez planchas para encontrar la primera que se rechace.

6. Vidrio

Una fábrica de vidrio ha instalado un sistema automático de visión artificial para detectar la presencia de impurezas en las planchas de vidrio que produce. Se sabe que los defectos del vidrio aparecen de manera independiente y por causas atribuidas al azar. El número medio de impurezas por cada plancha es 1.

a) Determina el modelo de distribución que representa el número de defectos por plancha (X).

$$\text{independencia} \implies X \sim \text{Poisson}(1)$$

6. Vidrio

Una fábrica de vidrio ha instalado un sistema automático de visión artificial para detectar la presencia de impurezas en las planchas de vidrio que produce. Se sabe que los defectos del vidrio aparecen de manera independiente y por causas atribuidas al azar. El número medio de impurezas por cada plancha es 1.

b) Si una plancha se rechaza cuando presenta 4 ó más defectos, ¿cuál es la probabilidad de que una plancha elegida al azar sea rechazada?

$$P[X \geq 4] = 1\text{-}\mathtt{ppois(3,1)} \approx 0'019$$

6. Vidrio

Una fábrica de vidrio ha instalado un sistema automático de visión artificial para detectar la presencia de impurezas en las planchas de vidrio que produce. Se sabe que los defectos del vidrio aparecen de manera independiente y por causas atribuidas al azar. El número medio de impurezas por cada plancha es 1.

c) Calcula la probabilidad de que sea necesario revisar diez planchas para encontrar la primera que se rechace.

```
> dgeom(9, p) # exactamente diez planchas
[1] 0.01597905
> 1-pgeom(8, p) # al menos diez planchas
[1] 0.8415274
```

7. Neutrinos

En un experimento diseñado para conocer las propiedades de los neutrinos, se ha construido un depósito rodeado de fotomultiplicadores, capaces de detectar la colisión entre un neutrino y un electrón. Además por las predicciones teóricas se supone que el número medio diario de colisiones es 0'5.

a) ¿Qué tipo de variable puede describir este experimento?

b) Calcula la probabilidad de que en un día cualquiera se puedan obtener tres o más colisiones.

c) Calcula la distribución del número de colisiones que aparecen en una semana.

d) Tras un año de trabajo se han obtenido las siguientes frecuencias de colisiones:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	214	113	33	4	1

Compara los resultados teóricos con los observados experimentalmente.

7. Neutrinos

En un experimento diseñado para conocer las propiedades de los neutrinos, se ha construido un depósito rodeado de fotomultiplicadores, capaces de detectar la colisión entre un neutrino y un electrón. Además por las predicciones teóricas se supone que el número medio diario de colisiones es 0'5.

a) ¿Qué tipo de variable puede describir este experimento?

X = "número de colisiones en un día"

7. Neutrinos

En un experimento diseñado para conocer las propiedades de los neutrinos, se ha construido un depósito rodeado de fotomultiplicadores, capaces de detectar la colisión entre un neutrino y un electrón. Además por las predicciones teóricas se supone que el número medio diario de colisiones es 0'5.

a) ¿Qué tipo de variable puede describir este experimento?

$$X = \text{“número de colisiones en un día”}$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Condiciones experimentales} \\ \text{constantes} \\ \text{Colisiones producidas} \\ \text{de forma independiente} \\ \text{Probabilidad de colisión} \\ \text{constante} \end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim$$

7. Neutrinos

En un experimento diseñado para conocer las propiedades de los neutrinos, se ha construido un depósito rodeado de fotomultiplicadores, capaces de detectar la colisión entre un neutrino y un electrón. Además por las predicciones teóricas se supone que el número medio diario de colisiones es 0’5.

a) ¿Qué tipo de variable puede describir este experimento?

$$X = \text{“número de colisiones en un día”}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{Condiciones experimentales}\\ \text{constantes}\\[1ex] \text{Colisiones producidas}\\ \text{de forma independiente}\\[1ex] \text{Probabilidad de colisión}\\ \text{constante}\end{array}\right\} \Longrightarrow X \sim \text{Poisson}\,(\lambda = 0'5)$$

7b. Neutrinos: prob. 3 o más colisiones

$$P[X \geqslant 3] \quad =$$

7b. Neutrinos: prob. 3 o más colisiones

$$
\begin{aligned}
P[X \geqslant 3] &= 1 - P[X \leqslant 2] \\
&= \texttt{1 - ppois(2,0.5)} \\
\text{(otra forma)} &= 1 - P[X = 0] - P[X = 1] - P[X = 2] \\
&= 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^2}{2!} \\
&= 1 - e^{-0'5}(1 + 0'5 + 0'125) \\
&= 1 - 0'9856123 \\
&= 0'01438768
\end{aligned}
$$

7c. Neutrinos: distribución por semana

Las colisiones de días distintos

- son independientes y
- siguen la misma distribución Poisson $(0'5)$.

Por tanto,

7c. Neutrinos: distribución por semana

Las colisiones de días distintos

- son independientes y
- siguen la misma distribución Poisson (0'5).

Por tanto, se puede aplicar la propiedad de reproductividad para conocer la distribución de

$$\begin{aligned} S &= \text{“número de colisiones en una semana”} \\ &= X_1 + \cdots + X_7 \\ &\sim \end{aligned}$$

7c. Neutrinos: distribución por semana

Las colisiones de días distintos

- son independientes y
- siguen la misma distribución Poisson (0’5).

Por tanto, se puede aplicar la propiedad de reproductividad para conocer la distribución de

$$\begin{aligned} S &= \text{“número de colisiones en una semana”} \\ &= X_1 + \cdots + X_7 \\ &\sim \text{Poisson}\,(7 \times 0\text{'}5) \\ &= \text{Poisson}\,(3\text{'}5) \end{aligned}$$

7d. Neutrinos: comparar muestra con teoría

Para hacer la comparación se va a calcular el número esperado de días, en el año, con k colisiones, es decir,

$$365 \times \mathrm{P}[X = k] = 365 \times e^{-0'5} \frac{0'5^k}{k!}$$

Por ejemplo, con R:

- `365 * dpois (0:4, 0.5)`
- `365 * (1 - ppois (4, 0.5))`

x_i	0	1	2	3	4	> 4
obs.	214	113	33	4	1	0
esp.	221'3836	110'6918	27'6729	4'6121	0'5765	0'0628

Las frecuencias observadas en el experimento se parecen mucho a las esperadas según el modelo teórico formulado.