Ejercicios de repaso inicial

Distribuciones continuas

Facultad de Ciencias

Universidad Oviedo

Curso 2024-25

Ejercicio 1

Se considera una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{si } 3 < x < 5 \\ (9-x)\,a/4 & \text{si } 5 \leqslant x < 9 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

b) Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

c) Calcula la media y la varianza de esta variable.

d) Calcula la distribución de X^2.

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$1 = \int f(x)\,\mathrm{d}x \; = \; \int_3^5 a\,\mathrm{d}x + \int_5^9 (9-x)\frac{a}{4}\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio 1a

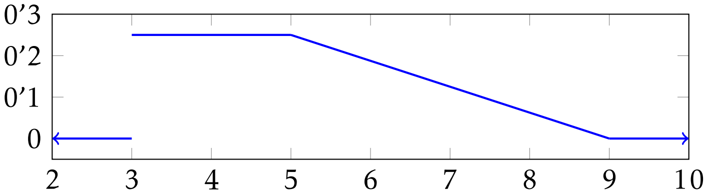
Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$
\begin{aligned}
1 = \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_3^5 a\,\mathrm{d}x + \int_5^9 (9-x)\frac{a}{4}\,\mathrm{d}x \\
&= 2a + \left|\frac{-a}{8}(9-x)^2\right|_{x=5}^{x=9} \\
&= 4a \\
&\Rightarrow \quad a = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$\begin{aligned} 1 = \int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_3^5 a\,\mathrm{d}x + \int_5^9 (9-x)\frac{a}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= 2a + \left| \frac{-a}{8}(9-x)^2 \right|_{x=5}^{x=9} \\ &= 4a \\ \Rightarrow &\quad a = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$\mathrm{F}_{\mathrm{X}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{X}}(t)\,\mathrm{d}t = \left\{ \vphantom{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}} \right.$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ & \\ & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t + \int_5^x (9-t)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}t = & \\ & \\ & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t + \int_5^x (9-t)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}t = & \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t + \int_5^x (9-t)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}t = & \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = & \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = & \\ & \\ & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

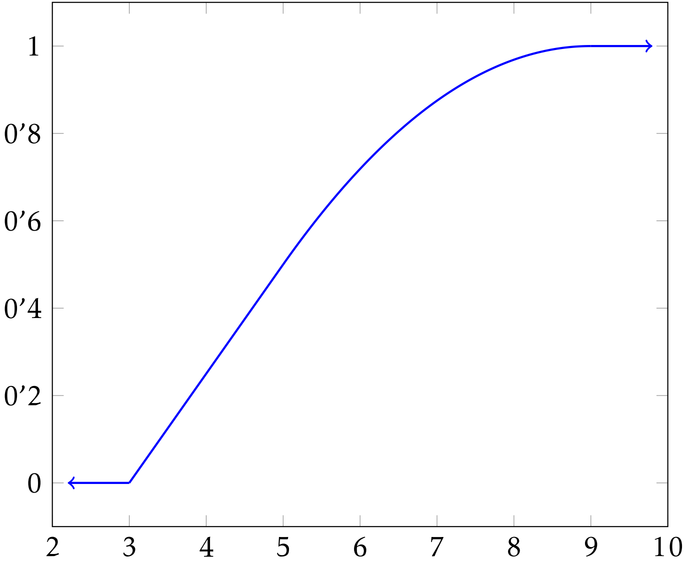
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4}\,\mathrm{d}t + \int_5^x (9-t)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}t = & \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = & \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = & \\ = 1 - \frac{(9-x)^2}{32} & \text{si } 5 < x \leqslant 9 \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4}\,dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leqslant 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4}\,dt + \int_5^x (9-t)\frac{1}{16}\,dt = & \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = & \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = & \\ = 1 - \frac{(9-x)^2}{32} & \text{si } 5 < x \leqslant 9 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 9 \end{cases}$$

Ejercicio1b



Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$\mathcal{E}[X] =$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[\mathrm{X}] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\mathrm{X}}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{3}^{5} x \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int_{5}^{9} x(9-x)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_3^5 x\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int_5^9 x(9-x)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}x \\
&= \left|\texttt{integrate(x/4,x)}\right|_{x=3}^{x=5} \qquad\qquad \texttt{/* código Maxima */} \\
&+ \left|\texttt{integrate(x*(9-x)/16,x)}\right|_{x=5}^{x=9} \\
&= \left|\frac{x^2}{8}\right|_{x=3}^{x=5} + \left|-\frac{2\,x^3-27\,x^2}{96}\right|_{x=5}^{x=9} \\
&= \frac{25}{8} - \frac{9}{8} \quad + \quad \frac{243}{32} - \frac{425}{96} \\
&= 2 + \frac{19}{6} = 5 + \frac{1}{6}
\end{aligned}
$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx$$

$$= \int_3^5 x\frac{1}{4}\,dx + \int_5^9 x(9-x)\frac{1}{16}\,dx$$

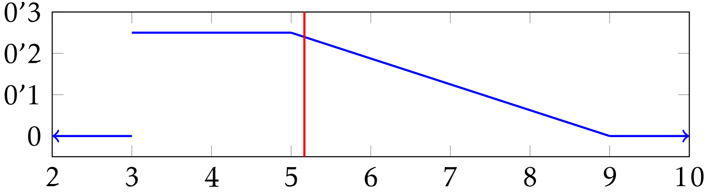
```
= integrate (x/4, x, 3, 5)      /* código Maxima */
 + integrate (x*(9-x)/16, x, 5, 9);
```

$$= 5 + 1/6$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_3^5 x\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x + \int_5^9 x(9-x)\frac{1}{16}\,\mathrm{d}x \\
&= \texttt{integrate (x/4, x, 3, 5)} \qquad \texttt{/* código Maxima */} \\
&\quad \texttt{+ integrate (x*(9-x)/16, x, 5, 9);} \\
&= 5 + 1/6
\end{aligned}$$



Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathrm{Var}\left[X\right] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - \left(\mathcal{E}\left[X\right]\right)^2$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathrm{Var}[X] = \mathcal{E}\left[X^2\right] - (\mathcal{E}[X])^2$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\left[X^2\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_3^5 \frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x + \int_5^9 \frac{x^2(9-x)}{16}\,\mathrm{d}x \\
&= \left|\frac{x^3}{12}\right|_{x=3}^{x=5} + \left|-\frac{x^4 - 12x^3}{64}\right|_{x=5}^{x=9} \\
&= \frac{125}{12} - \frac{9}{4} \quad + \quad \frac{2187}{64} - \frac{875}{64} \\
&= \frac{86}{3} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Var}[X] = \frac{71}{36} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{DT}[X] \approx 1'4
\end{aligned}$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2.

$$Y = X^2$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2.

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\mathrm{Sop}[X] = (3, 9) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Sop}[Y] = (9, 81)$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2.

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\operatorname{Sop}[X] = (3, 9) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{Sop}[Y] = (9, 81)$$

$$F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P\left[X^2 \leqslant y\right] = P\left[X \leqslant \sqrt{y}\right] = F_X\left(\sqrt{y}\right)$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2.

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\mathrm{Sop}[X] = (3,9) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Sop}[Y] = (9,81)$$

$$F_Y(y) = P[Y \leqslant y] = P\left[X^2 \leqslant y\right] = P\left[X \leqslant \sqrt{y}\right] = F_X\left(\sqrt{y}\right)$$

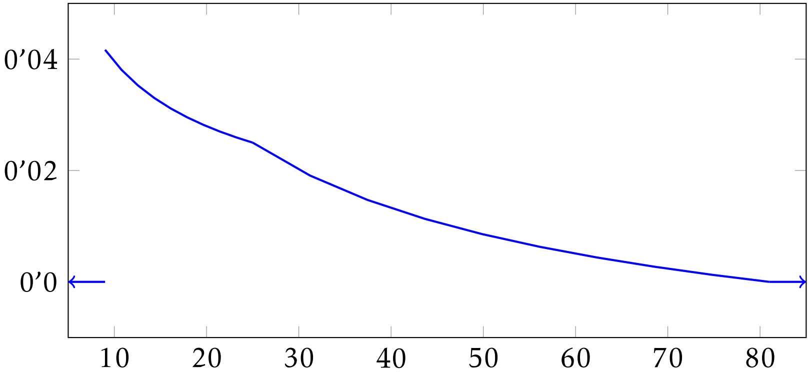
$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X\left(\sqrt{y}\right)$$

Ejercicio 1d

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X\left(\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot a = \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{si } 9 < y < 25 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (9 - \sqrt{y})\frac{a}{4} = \frac{9-\sqrt{y}}{32\sqrt{y}} & \text{si } 25 \leqslant y < 81 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 1d

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X\left(\sqrt{y}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot a = \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{si } 9 < y < 25 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (9 - \sqrt{y})\frac{a}{4} = \frac{9-\sqrt{y}}{32\sqrt{y}} & \text{si } 25 \leqslant y < 81 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Ejercicio 2

El tiempo que tarda en producirse la primera avería en cierta marca de teléfonos sigue una distribución normal con un promedio de 500 horas y una desviación estándar de 20 horas.

a) ¿Qué fracción de esos teléfonos fallarán antes de 530 horas?

b) ¿Qué fracción de esas teléfonos tendrán la primera avería entre 400 y 600 horas?

c) ¿Cuál debe ser el tiempo de garantía para estos teléfonos si el fabricante desea que sólo presente averías el 5 % de los teléfonos dentro del tiempo de garantía?

Ejercicio 2

El tiempo que tarda en producirse la primera avería en cierta marca de teléfonos sigue una distribución normal con un promedio de 500 horas y una desviación estándar de 20 horas.

a)
```
> pnorm (530, 500, 20)
[1] 0.9331928
```

b)
```
> diff (pnorm (c(400,600), 500, 20))
[1] 0.9999994
```

c)
```
> qnorm (.05, 500, 20)
[1] 467.1029
```

Ejercicio 3

La longitud de cierto tipo de piezas producidas por dos fábricas A y B, se distribuye normalmente con parámetros $A \sim \mathcal{N}(4, 0'5)$, $B \sim \mathcal{N}(3'9, 0'4)$. Sabiendo que una pieza se considera defectuosa cuando su longitud es inferior a 3 ó superior a 5 y que el 60 % de las piezas son producidas por A y el restante 40 % por B, calcula:

a) La función de densidad de la variable longitud.

b) La probabilidad de que una pieza elegida al azar no sea defectuosa.

c) La probabilidad de que al elegir tres piezas ninguna sea defectuosa.

Ejercicio 3

La longitud de cierto tipo de piezas producidas por dos fábricas A y B, se distribuye normalmente con parámetros $A \sim \mathcal{N}(4, 0'5)$, $B \sim \mathcal{N}(3'9, 0'4)$. Sabiendo que una pieza se considera defectuosa cuando su longitud es inferior a 3 ó superior a 5 y que el 60 % de las piezas son producidas por A y el restante 40 % por B, calcula:

a)
```
function (x)
   .6 * dnorm(x, 4, .5) + .4 * dnorm(x, 3.9, .4)
```

b)
```
F <- function (x)
   .6 * pnorm(x, 4, .5) + .4 * pnorm(x, 3.9, .4)
p <- diff (F (c(3,5))) # 0.9666181
```

c)
```
p^3 # 0.9031603
```

Ejercicio 4

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 50 mm y desviación típica de 0’01 mm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe estar entre 49’98 y 50’02 mm. Si el diámetro es menos de 49’98 se rechaza; si es mayor que 50’02 se reprocesa una sola vez y el nuevo diámetro sigue una distribución normal de media 49’99 y desviación típica 0’01.
Calcula:

a) la probabilidad de que un pistón sea defectuoso;
b) la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

Ejercicio 4a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

Ejercicio 4a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}\left(50, 0'01\right)$$

Ejercicio 4a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$\text{D} = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}\left(50, 0'01\right)$$

$$\text{ND} = \text{“nuevo diámetro de piezas procesadas”} \sim \mathcal{N}\left(49'99, 0'01\right)$$

Ejercicio 4a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}\,(50, 0'01)$$

$$ND = \text{“nuevo diámetro de piezas procesadas”} \sim \mathcal{N}\,(49'99, 0'01)$$

$$\begin{aligned}[\text{defectuosa}] = {} & [D < 49'98] \\ & \cup \Big([D > 50'02] \cap \Big([ND < 49'98] \cup [ND > 50'02]\Big)\Big)\end{aligned}$$

Ejercicio 4a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}\left(50, 0'01\right)$$

$$ND = \text{“nuevo diámetro de piezas procesadas”} \sim \mathcal{N}\left(49'99, 0'01\right)$$

$$\begin{aligned}[\text{defectuosa}] &= [D < 49'98] \\ &\cup \Big([D > 50'02] \cap \big([ND < 49'98] \cup [ND > 50'02]\big)\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P[\text{defectuosa}] &= P[D < 49'98] \\ &+ \Big(P[D > 50'02] \times \big(P[ND < 49'98] + P[ND > 50'02]\big)\Big)\end{aligned}$$

Ejercicio 4a

$$
\begin{aligned}
P[D < 49'98] &= P[\mathcal{N}(0,1) < -2] = 0'02275013 \\
P[D > 50'02] &= P[\mathcal{N}(0,1) > 2] = 0'02275013 \\
P[ND < 49'98] &= P[\mathcal{N}(0,1) < -1] = 0'1586553 \\
P[ND > 50'02] &= P[\mathcal{N}(0,1) > 3] = 0'001349898
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4a

$$
\begin{aligned}
P[D < 49'98] &= P[\mathcal{N}(0,1) < -2] = 0'02275013\\
P[D > 50'02] &= P[\mathcal{N}(0,1) > \quad 2] = 0'02275013\\
P[ND < 49'98] &= P[\mathcal{N}(0,1) < -1] = 0'1586553\\
P[ND > 50'02] &= P[\mathcal{N}(0,1) > \quad 3] = 0'001349898
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P[\text{defectuosa}] &= P[D < 49'98]\\
&+ \Big(P[D > 50'02] \times \big(P[ND < 49'98] + P[ND > 50'02]\big)\Big)\\
&= 0'02275013\\
&+ 0'02275013 \times (0'1586553 + 0'001349898)\\
&= 0'02639027
\end{aligned}
$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P\,[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

$$X = \text{“número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”}$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P\,[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

$$X = \text{“número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”}$$

$$X \sim \mathcal{B}\,(10, 0'02275013)$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

$$X = \text{“número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”}$$

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0'02275013)$$

$$P[X = 1] = 10 \cdot 0'02275013 \cdot (1 - 0'02275013)^9 = 0'1849415$$

Ejercicio 4b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

$$X = \text{“número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”}$$

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0'02275013)$$

$$P[X = 1] = 10 \cdot 0'02275013 \cdot (1 - 0'02275013)^9 = 0'1849415$$

En R: `dbinom (1, 10, 0.02275013)`

Ejercicio 5

La duración en años de los discos duros producidos por una fábrica A sigue una distribución exponencial, con promedio de 3 años. Un disco duro se considera defectuoso si dura menos de un año.

a) Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

b) Calcula la probabilidad de que haya que probar 6 discos duros hasta para encontrar el primero defectuoso.

c) Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

$$X_i = \text{“duración, en años, de un disco duro de la fábrica } i\text{”}$$

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

$$X_i = \text{“duración, en años, de un disco duro de la fábrica } i\text{”}$$

$$X_A \sim \mathrm{Exp}\,(\text{media} = 3) = \mathrm{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

$$X_i = \text{“duración, en años, de un disco duro de la fábrica } i\text{”}$$

$$X_A \sim \text{Exp}\,(\text{media} = 3) = \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

$$\mathrm{X}_i = \text{“duración, en años, de un disco duro de la fábrica } i\text{”}$$

$$\mathrm{X_A} \sim \mathrm{Exp}\,(\text{media} = 3) = \mathrm{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_{\mathrm{A}}(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$\mathrm{P}\,[\text{defectuoso} \,|\, \mathrm{A}] = \mathrm{P}\,[\mathrm{X_A} < 1] = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, \mathrm{d}x = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0'2835$$

Ejercicio 5a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

$$X_i = \text{“duración, en años, de un disco duro de la fábrica } i\text{”}$$

$$X_A \sim \mathrm{Exp}\,(\text{media} = 3) = \mathrm{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$P\,[\text{defectuoso} \mid A] = P\,[X_A < 1] = \int_0^1 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}x}\, dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0'2835$$

$$P\,[\text{no defectuoso} \mid A] = 1 - P\,[\text{defectuoso} \mid A] = 1 - 0'2835 = 0'7165$$

Ejercicio 5b

$$P[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}] =$$

Ejercicio 5b

$$\mathrm{P}\left[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\text{5 primeros bien y el sexto, defectuoso}\right] =$$

Ejercicio 5b

$$P\left[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}\right] =$$

$$= P\left[\text{5 primeros bien y el sexto, defectuoso}\right] =$$

$$= (1 - P\left[\text{defectuoso} \mid A\right])^5 \times P\left[\text{defectuoso} \mid A\right] =$$

$$= (1 - 0'2834687)^5 \times 0'2834687 = 0'05354032$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad P\,[\text{defectuoso}\,|\,B] = P\,[X_B < 1] =$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{P}\,[\text{defectuoso} \mid B] = \mathrm{P}\,[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x}\,\mathrm{d}x = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0\text{'}98168436$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \mathrm{Exp}\,(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad P\,[\text{defectuoso} \mid B] = P\,[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x}\,dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P\,[\text{defectuoso}] &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}\,(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad P\,[\text{defectuoso}\,|\,B] = P\,[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x}\,dx = \left|-e^{-4x}\right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P\,[\text{defectuoso}] &= P\,[\text{defectuoso} \cap A] + P\,[\text{defectuoso} \cap B] \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \operatorname{Exp}(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x}\,dx = \left|-e^{-4x}\right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P[\text{defectuoso}] &= P[\text{defectuoso} \cap A] + P[\text{defectuoso} \cap B] \\ &= P[\text{defectuoso} \mid A] \cdot P[A] + P[\text{defectuoso} \mid B] \cdot P[B] \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio 5c

Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \operatorname{Exp}(\lambda = 4) \quad \Longrightarrow \quad P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x}\, dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P[\text{defectuoso}] &= P[\text{defectuoso} \cap A] + P[\text{defectuoso} \cap B] \\ &= P[\text{defectuoso} \mid A] \cdot P[A] + P[\text{defectuoso} \mid B] \cdot P[B] \\ &= 0'2834687 \times 0'60 + 0'9816844 \times 0'40 \\ &= 0'562755 \end{aligned}$$

Ejercicio 6

La duración en horas de cierto componente eléctrico viene determinada por una variable aleatoria con distribución exponencial de media 100. Un equipo electrónico utiliza tres de estos componentes, que trabajan de forma independiente. Sabiendo que el equipo deja de funcionar si fallan al menos dos de los componentes, calcula las probabilidad siguientes:

a) El equipo trabaje por lo menos 200 horas sin avería.

b) El equipo trabaje sin avería más de 200 horas y menos de 500 horas.

Ejercicio 6

La duración en horas de cierto componente eléctrico viene determinada por una variable aleatoria con distribución exponencial de media 100. Un equipo electrónico utiliza tres de estos componentes, que trabajan de forma independiente. Sabiendo que el equipo deja de funcionar si fallan al menos dos de los componentes, calcula las probabilidad siguientes:

a)
```
p <- 1 - pexp(200, 1/100)           # 0.1353353
p1 <- sum(dbinom(2:3, 3, p))        # 0.04998941
```

b)
```
p500 <- 1 - pexp(500, 1/100)        # 0.006737947
p2 <- sum(dbinom(2:3, 3, p500))     # 0.000135588
p1 - p2                             # 0.04985382
## simulando
expos  <- matrix (rexp (3e5, .01), 3)
distro <- apply (expos, 2, function (x) sort(x)[2])
mean(distro > 200) - mean(distro > 500)
## 0.05011 0.04947 0.04955 0.04966 etc
```

Ejercicio 7

Una empresa telefónica está estudiando las características que debe cumplir una central telefónica para atender una zona en la que se espera recibir una media de 300 llamadas por minuto. Además pretende que en el 99'9 % de los casos los usuarios no sufran ningún tipo de demora. ¿Cuál debe ser la capacidad de la central para cumplir esas especificaciones?

Ejercicio 7

Una empresa telefónica está estudiando las características que debe cumplir una central telefónica para atender una zona en la que se espera recibir una media de 300 llamadas por minuto. Además pretende que en el 99'9 % de los casos los usuarios no sufran ningún tipo de demora. ¿Cuál debe ser la capacidad de la central para cumplir esas especificaciones?

```
qpois(.999, 300) # 355
```

Con 355 puestos de atención las cumpliría.

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

$$T = \text{“tiempo de respuesta del sensor”}$$

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

$$T = \text{“tiempo de respuesta del sensor”}$$

$$T \sim \operatorname{Exp}(\text{media} = 0'5) = \operatorname{Exp}(\lambda = 2)$$

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

$$\mathrm{T} = \text{“tiempo de respuesta del sensor”}$$

$$\mathrm{T} \sim \mathrm{Exp}\,(\text{media} = 0'5) = \mathrm{Exp}\,(\lambda = 2)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\left[|\mathrm{T} - \text{media}| > 0'3\right] &= \mathrm{P}\left[\mathrm{T} - 0'5 < -0'3\right] + \mathrm{P}\left[\mathrm{T} - 0'5 > 0'3\right] \\
&= \mathrm{P}\left[\mathrm{T} < 0'2\right] + \mathrm{P}\left[\mathrm{T} > 0'8\right] \\
&= \int_0^{0'2} 2e^{-2t}\,\mathrm{d}t + \int_{0'8}^{\infty} 2e^{-2t}\,\mathrm{d}t \\
&= 1 - e^{-2\times 0'2} + e^{-2\times 0'8} = 0'5315765
\end{aligned}$$

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a $0'0001$.

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda} \leqslant 0'0001$$

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0’5 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $\mathrm{P}[\mathrm{T} > 1]$ sea menor o igual a 0’0001.

$$\mathrm{P}[\mathrm{T} > 1] = \int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda} \leqslant 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0’5 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0’0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda} \leqslant 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

$$-\lambda \leqslant \ln 0'0001$$

Ejercicio 8

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = e^{-\lambda} \leqslant 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

$$-\lambda \leqslant \ln 0'0001$$

$$\lambda \geqslant -\ln 0'0001 = 9'21034$$

Ejercicio 9

El ordenador central de una empresa recibe, según una distribución de Poisson, un promedio de 25 mensajes por minuto.

a) Calcula la probabilidad de que entre dos mensajes consecutivos transcurran al menos, 2 minutos.

b) Calcula el tiempo medio que transcurre entre dos mensajes consecutivos.

Ejercicio 9

El ordenador central de una empresa recibe, según una distribución de Poisson, un promedio de 25 mensajes por minuto.

a) Calcula la probabilidad de que entre dos mensajes consecutivos transcurran al menos, 2 minutos.

```
dpois(0, 25*2) # 1.92875e-22
```

b) Calcula el tiempo medio que transcurre entre dos mensajes consecutivos.

```
1/25 * 60 # 2.4 segundos
```

Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$, que representa el voltaje producido al transformar la voz en una señal eléctrica. Para analizarla de manera más adecuada se define una nueva variable aleatoria $Y := \cos X$.

a) Calcula la distribución de Y.

b) ¿Cuál es su valor esperado?

Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$, que representa el voltaje producido al transformar la voz en una señal eléctrica. Para analizarla de manera más adecuada se define una nueva variable aleatoria $Y := \cos X$.

a) Calcula la distribución de Y.

$$
\begin{aligned}
-1 \leq x \leq 1 \implies F_Y(x) &= P[Y \leq x] = P[\cos X \leq x] \\
&= P[X \leq -\arccos x] + P[X \geq \arccos x] \\
&= F_X(-\arccos x) + 1 - F_X(\arccos x) \\
&= \frac{-\arccos x - (-\pi)}{2\pi} + \frac{\pi - \arccos x}{2\pi} \\
&= 1 - \frac{1}{\pi} \arccos x \\
f_Y(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sim 2 \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1
\end{aligned}
$$

Ejercicio 10

Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(-\pi, \pi)$, que representa el voltaje producido al transformar la voz en una señal eléctrica. Para analizarla de manera más adecuada se define una nueva variable aleatoria $Y := \cos X$.

b) ¿Cuál es su valor esperado?

$$\mathcal{E}[Y] = 0$$

pues f_Y es simétrica respecto al cero. Además,

$$\mathcal{E}[Y] = 2 \cdot \mathcal{E}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] - 1 = 0$$

Ejercicio 11

Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0, 2\pi)$ que representa el voltaje producido al transformar la voz en una señal elécctrica. Para analizarla de manera más adecuada se define una nueva variable aleatoria $Y := \operatorname{sen} X$.

a) Calcula la distribución de Y.

b) ¿Cuál es su valor esperado?

Ejercicio 11

a) Calcula la distribución de Y.

$$-1 \leq x \leq 0 \implies$$

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P[Y \leq x] = P[\operatorname{sen} X \leq x] \\
&= P[X \leq \operatorname{arcsen} x + 2\pi] - P[X \leq \pi - \operatorname{arcsen} x] \\
&= F_X(\operatorname{arcsen} x + 2\pi) - F_X(\pi - \operatorname{arcsen} x) \\
&= \frac{\operatorname{arcsen} x + 2\pi}{2\pi} - \frac{\pi - \operatorname{arcsen} x}{2\pi} \\
&= \frac{\operatorname{arcsen} x}{\pi} + \frac{1}{2} \\
f_Y(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 11

a) Calcula la distribución de Y.

$$
\begin{aligned}
&0 \leq x \leq 1 \implies \\
&\qquad \begin{aligned}
F_Y(x) &= P[Y \leq x] = P[\operatorname{sen} X \leq x] \\
&= P[X \leq \operatorname{arc\,sen} x] + P[X \geq \pi - \operatorname{arc\,sen} x] \\
&= F_X(\operatorname{arc\,sen} x) + 1 - F_X(\pi - \operatorname{arc\,sen} x) \\
&= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{2\pi} + 1 - \frac{\pi - \operatorname{arc\,sen} x}{2\pi} \\
&= \frac{\operatorname{arc\,sen} x}{\pi} + \frac{1}{2} \\
f_Y(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}
\end{aligned}
$$

Ejercicio 11

Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0, 2\pi)$ que representa el voltaje producido al transformar la voz en una señal elécctrica. Para analizarla de manera más adecuada se define una nueva variable aleatoria $Y := \operatorname{sen} X$.

a) Calcula la distribución de Y.

$$
\begin{aligned}
-1 \leq x \leq 1 \implies & \\
f_Y(x) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \sim 2 \cdot \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1
\end{aligned}
$$

b) ¿Cuál es su valor esperado?

$$\mathcal{E}[Y] = 2 \cdot \mathcal{E}\left[\beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right] - 1 = 0$$

Ejercicio 12

Sea X una variable aleatoria con distribución $\beta(3,1)$. Calcula la distribución de $Y := 1 - X$, $Z := -\log X$, $T := -\log(1 - X)$.

Ejercicio 12

Sea X una variable aleatoria con distribución $\beta(3, 1)$. Calcula la distribución de $Y := 1 - X$, $Z := -\log X$, $T := -\log(1 - X)$.

- $f_x(x) \propto x^2 \implies F_x(x) = x^3$
- $Y \sim \beta(1, 3)$
- $Z \sim \text{Exp}(3)$; $x > 0$:

$$F_Z(x) = P[Z \leq x] = P[-\log X \leq x] = P[X \geq e^{-x}] = 1 - e^{-3x}$$

- $x > 0$:

$$F_T(x) = P[T \leq x] = P[-\log(1 - X) \leq x] = P[1 - X \geq e^{-x}] =$$

$$= P[X \leq 1 - e^{-x}] = F_X(1 - e^{-x}) = (1 - e^{-x})^3$$