

Ejercicios de repaso inicial

Distribuciones continuas

Facultad de Ciencias

Universidad Oviedo

Curso 2021-22

Ejercicio 1

Se considera una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_X(x) = \begin{cases} a & \text{si } 3 < x < 5 \\ (9-x)a/4 & \text{si } 5 \leq x < 9 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- a) Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.
- b) Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.
- c) Calcula la media y la varianza de esta variable.
- d) Calcula la distribución de X^2 .

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$1 = \int f(x) dx = \int_3^5 a dx + \int_5^9 (9-x) \frac{a}{4} dx$$

Ejercicio 1a

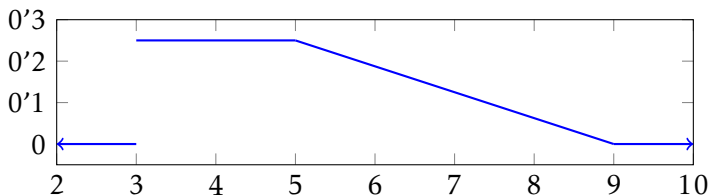
Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$\begin{aligned} 1 &= \int f(x) dx = \int_3^5 a dx + \int_5^9 (9-x) \frac{a}{4} dx \\ &= 2a + \left| \frac{-a}{8} (9-x)^2 \right|_{x=5}^{x=9} \\ &= 4a \\ \Rightarrow \quad a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 1a

Calcula el valor de a para que la anterior función sea de densidad y representa esta función.

$$\begin{aligned}1 &= \int f(x) dx = \int_3^5 a dx + \int_5^9 (9-x) \frac{a}{4} dx \\&= 2a + \left| \frac{-a}{8} (9-x)^2 \right|_{x=5}^{x=9} \\&= 4a \\&\Rightarrow a = \frac{1}{4}\end{aligned}$$



Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \left\{ \right.$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dt + \int_5^x (9-t) \frac{1}{16} dt = & \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dt + \int_5^x (9-t) \frac{1}{16} dt = \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dt + \int_5^x (9-t) \frac{1}{16} dt = \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

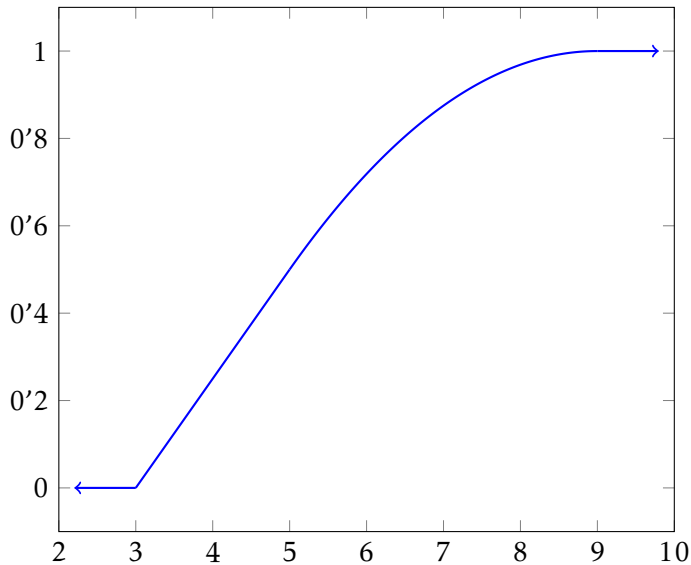
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dt + \int_5^x (9-t) \frac{1}{16} dt = \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = \\ = 1 - \frac{(9-x)^2}{32} & \text{si } 5 < x \leq 9 \end{cases}$$

Ejercicio 1b

Calcula y representa la función de distribución de la variable anterior.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 3 \\ \int_3^x \frac{1}{4} dt = \frac{x-3}{4} & \text{si } 3 < x \leq 5 \\ \int_3^5 \frac{1}{4} dt + \int_5^x (9-t) \frac{1}{16} dt = \\ = \frac{1}{2} + \left| -\frac{1}{32}(9-t)^2 \right|_{t=5}^{t=x} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{32}(9-x)^2 + \frac{1}{2} = \\ = 1 - \frac{(9-x)^2}{32} & \text{si } 5 < x \leq 9 \\ 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

Ejercicio1b



Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathcal{E}[X] =$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\mathcal{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_3^5 x \frac{1}{4} dx + \int_5^9 x(9-x) \frac{1}{16} dx\end{aligned}$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_3^5 x \frac{1}{4} dx + \int_5^9 x(9-x) \frac{1}{16} dx\end{aligned}$$

$$= \left| \text{integrate}(x/4, x) \right|_{x=3}^{x=5}$$

/* código Maxima */

$$+ \left| \text{integrate}(x*(9-x)/16, x) \right|_{x=5}^{x=9}$$

$$= \left| \frac{x^2}{8} \right|_{x=3}^{x=5} + \left| -\frac{2x^3 - 27x^2}{96} \right|_{x=5}^{x=9}$$

$$= \frac{25}{8} - \frac{9}{8} + \frac{243}{32} - \frac{425}{96}$$

$$= 2 + \frac{19}{6} = 5 + \frac{1}{6}$$

Ejercicio1c

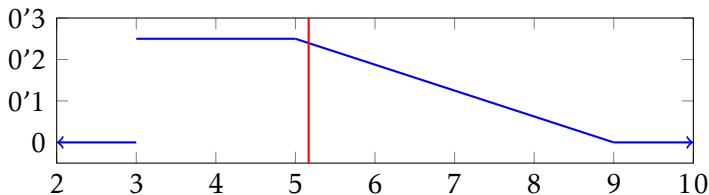
Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_3^5 x \frac{1}{4} dx + \int_5^9 x(9-x) \frac{1}{16} dx \\ &= \text{integrate (x/4, x, 3, 5)} \quad /* \text{código Maxima} */ \\ &\quad + \text{integrate (x*(9-x)/16, x, 5, 9);} \\ &= 5 + 1/6\end{aligned}$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx \\ &= \int_3^5 x \frac{1}{4} dx + \int_5^9 x(9-x) \frac{1}{16} dx \\ &= \text{integrate}(x/4, x, 3, 5) \quad /* \text{código Maxima} */ \\ &\quad + \text{integrate}(x*(9-x)/16, x, 5, 9); \\ &= 5 + 1/6\end{aligned}$$



Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\text{Var}[X] = \mathcal{E}[X^2] - (\mathcal{E}[X])^2$$

Ejercicio1c

Calcula la media y la varianza de esta variable.

$$\text{Var}[X] = \mathcal{E}[X^2] - (\mathcal{E}[X])^2$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) dx \\&= \int_3^5 \frac{x^2}{4} dx + \int_5^9 \frac{x^2(9-x)}{16} dx \\&= \left| \frac{x^3}{12} \right|_{x=3}^{x=5} + \left| -\frac{x^4 - 12x^3}{64} \right|_{x=5}^{x=9} \\&= \frac{125}{12} - \frac{9}{4} + \frac{2187}{64} - \frac{875}{64} \\&= \frac{86}{3} \implies \text{Var}[X] = \frac{71}{36} \implies \text{DT}[X] \approx 1'4\end{aligned}$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2 .

$$Y = X^2$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2 .

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\text{Sop}[X] = (3, 9) \implies \text{Sop}[Y] = (9, 81)$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2 .

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\text{Sop}[X] = (3, 9) \implies \text{Sop}[Y] = (9, 81)$$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[X \leq \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y})$$

Ejercicio 1d

Calcula la distribución de X^2 .

$$Y = X^2$$

Como el soporte de X es positivo, la transformación por el cuadrado es estrictamente creciente y positiva:

$$\text{Sop}[X] = (3, 9) \implies \text{Sop}[Y] = (9, 81)$$

$$F_Y(y) = P[Y \leq y] = P[X^2 \leq y] = P[X \leq \sqrt{y}] = F_X(\sqrt{y})$$

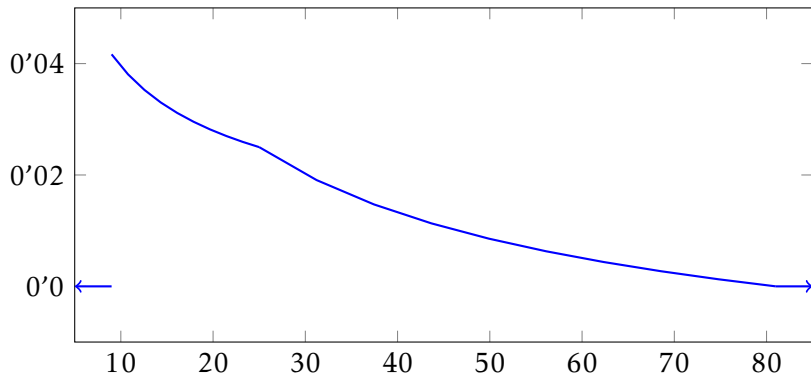
$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(\sqrt{y})$$

Ejercicio 1d

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot a = \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{si } 9 < y < 25 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (9 - \sqrt{y}) \frac{a}{4} = \frac{9 - \sqrt{y}}{32\sqrt{y}} & \text{si } 25 \leq y < 81 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 1d

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot f_X(\sqrt{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot a = \frac{1}{8\sqrt{y}} & \text{si } 9 < y < 25 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (9 - \sqrt{y}) \frac{a}{4} = \frac{9 - \sqrt{y}}{32\sqrt{y}} & \text{si } 25 \leq y < 81 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Ejercicio 2

Una fábrica produce pistones cuyos diámetros siguen una distribución normal de media 50 mm y desviación típica de 0'01 mm. Para que un pistón sirva, su diámetro debe estar entre 49'98 y 50'02 mm. Si el diámetro es menos de 49'98 se rechaza; si es mayor que 50'02 se reprocesa una sola vez y el nuevo diámetro sigue una distribución normal de media 49'99 y desviación típica 0'01.

Calcula:

- a) la probabilidad de que un pistón sea defectuoso;
- b) la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

Ejercicio 2a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

Ejercicio 2a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}(50, 0.01)$$

Ejercicio 2a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{“diámetro de las piezas”} \sim \mathcal{N}(50, 0'01)$$

$$ND = \text{“nuevo diámetro de piezas procesadas”} \sim \mathcal{N}(49'99, 0'01)$$

Ejercicio 2a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{"diámetro de las piezas"} \sim \mathcal{N}(50, 0'01)$$

$$ND = \text{"nuevo diámetro de piezas procesadas"} \sim \mathcal{N}(49'99, 0'01)$$

$$[\text{defectuosa}] = [D < 49'98]$$

$$\cup \left([D > 50'02] \cap \left([ND < 49'98] \cup [ND > 50'02] \right) \right)$$

Ejercicio 2a

Calcula la probabilidad de que un pistón sea defectuoso.

$$D = \text{"diámetro de las piezas"} \sim \mathcal{N}(50, 0'01)$$

$$ND = \text{"nuevo diámetro de piezas procesadas"} \sim \mathcal{N}(49'99, 0'01)$$

$$\begin{aligned} [\text{defectuosa}] &= [D < 49'98] \\ &\cup \left([D > 50'02] \cap \left([ND < 49'98] \cup [ND > 50'02] \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[\text{defectuosa}] &= P[D < 49'98] \\ &+ \left(P[D > 50'02] \times \left(P[ND < 49'98] + P[ND > 50'02] \right) \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 2a

$$P[D < 49'98] = P[\mathcal{N}(0,1) < -2] = 0'02275013$$

$$P[D > 50'02] = P[\mathcal{N}(0,1) > 2] = 0'02275013$$

$$P[ND < 49'98] = P[\mathcal{N}(0,1) < -1] = 0'1586553$$

$$P[ND > 50'02] = P[\mathcal{N}(0,1) > 3] = 0'001349898$$

Ejercicio 2a

$$P[D < 49'98] = P[\mathcal{N}(0,1) < -2] = 0'02275013$$

$$P[D > 50'02] = P[\mathcal{N}(0,1) > 2] = 0'02275013$$

$$P[ND < 49'98] = P[\mathcal{N}(0,1) < -1] = 0'1586553$$

$$P[ND > 50'02] = P[\mathcal{N}(0,1) > 3] = 0'001349898$$

$$P[\text{defectuosa}] = P[D < 49'98]$$

$$+ \left(P[D > 50'02] \times \left(P[ND < 49'98] + P[ND > 50'02] \right) \right)$$

$$= 0'02275013$$

$$+ 0'02275013 \times (0'1586553 + 0'001349898)$$

$$= 0'02639027$$

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

X = “número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

X = “número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0'02275013)$$

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

X = “número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0'02275013)$$

$$P[X = 1] = 10 \cdot 0'02275013 \cdot (1 - 0'02275013)^9 = 0'1849415$$

Ejercicio 2b

Calcula la probabilidad de que entre 10 pistones elegidos al azar solamente uno sea reprocesado.

$$[\text{reprocesar}] = [D > 50'02]$$

$$P[\text{reprocesar}] = 0'02275013$$

X = “número de piezas reprocesadas entre las 10 elegidas”

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0'02275013)$$

$$P[X = 1] = 10 \cdot 0'02275013 \cdot (1 - 0'02275013)^9 = 0'1849415$$

En R: `dbinom (1, 10, 0.02275013)`

Ejercicio 3

La duración en años de los discos duros producidos por una fábrica A sigue una distribución exponencial, con promedio de 3 años. Un disco duro se considera defectuoso si dura menos de un año.

- a) Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.
- b) Calcula la probabilidad de que haya que probar 6 discos duros hasta para encontrar el primero defectuoso.
- c) Si el 60 % de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40 % restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

X_i = “duración, en años, de un disco duro de la fábrica i ”

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

X_i = “duración, en años, de un disco duro de la fábrica i ”

$$X_A \sim \text{Exp}(\text{media} = 3) = \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

X_i = “duración, en años, de un disco duro de la fábrica i ”

$$X_A \sim \text{Exp}(\text{media} = 3) = \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

X_i = “duración, en años, de un disco duro de la fábrica i ”

$$X_A \sim \text{Exp}(\text{media} = 3) = \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$P[\text{defectuoso} \mid A] = P[X_A < 1] = \int_0^1 \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0,2835$$

Ejercicio 3a

Calcula la probabilidad de que un disco duro elegido al azar no sea defectuoso.

X_i = “duración, en años, de un disco duro de la fábrica i ”

$$X_A \sim \text{Exp}(\text{media} = 3) = \text{Exp}\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$$

$$f_A(x) = \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} \cdot \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

$$P[\text{defectuoso} \mid A] = P[X_A < 1] = \int_0^1 \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x} dx = 1 - e^{-\frac{1}{3}} = 0'2835$$

$$P[\text{no defectuoso} \mid A] = 1 - P[\text{defectuoso} \mid A] = 1 - 0'2835 = 0'7165$$

Ejercicio 3b

$P[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}] =$

Ejercicio 3b

$P[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}] =$

$= P[5 \text{ primeros bien y el sexto, defectuoso}] =$

Ejercicio 3b

$P[\text{probar 6 discos hasta el primero defectuoso}] =$

$= P[5 \text{ primeros bien y el sexto, defectuoso}] =$

$= (1 - P[\text{defectuoso} \mid A])^5 \times P[\text{defectuoso} \mid A] =$

$= (1 - 0'2834687)^5 \times 0'2834687 = 0'05354032$

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x} dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x} dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$P[\text{defectuoso}] =$$

=

=

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x} dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$P[\text{defectuoso}] = P[\text{defectuoso} \cap A] + P[\text{defectuoso} \cap B]$$

=

=

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x} dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P[\text{defectuoso}] &= P[\text{defectuoso} \cap A] + P[\text{defectuoso} \cap B] \\ &= P[\text{defectuoso} \mid A] \cdot P[A] + P[\text{defectuoso} \mid B] \cdot P[B] \\ &= \end{aligned}$$

Ejercicio 3c

Si el 60% de los discos duros que se venden en una tienda proceden de la fábrica A y, el 40% restante, de una segunda fábrica B, donde la duración de los discos duros sigue una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 4$, calcula la probabilidad de que un disco duro vendido en la tienda resulte defectuoso.

$$X_B \sim \text{Exp}(\lambda = 4) \implies P[\text{defectuoso} \mid B] = P[X_B < 1] =$$

$$= \int_0^1 4e^{-4x} dx = \left| -e^{-4x} \right|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-4} = 0'98168436$$

$$\begin{aligned} P[\text{defectuoso}] &= P[\text{defectuoso} \cap A] + P[\text{defectuoso} \cap B] \\ &= P[\text{defectuoso} \mid A] \cdot P[A] + P[\text{defectuoso} \mid B] \cdot P[B] \\ &= 0'2834687 \times 0'60 + 0'9816844 \times 0'40 \\ &= 0'562755 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.
- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

T = “tiempo de respuesta del sensor”

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

$T = \text{"tiempo de respuesta del sensor"}$

$$T \sim \text{Exp}(\text{media} = 0'5) = \text{Exp}(\lambda = 2)$$

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- a) Suponiendo que la distribución del tiempo de respuesta es exponencial, calcula la probabilidad de que la variable se diferencie de la media más de 0'3 segundos.

$T = \text{"tiempo de respuesta del sensor"}$

$T \sim \text{Exp}(\text{media} = 0'5) = \text{Exp}(\lambda = 2)$

$$\begin{aligned} P[|T - \text{media}| > 0'3] &= P[T - 0'5 < -0'3] + P[T - 0'5 > 0'3] \\ &= P[T < 0'2] + P[T > 0'8] \\ &= \int_0^{0'2} 2e^{-2t} dt + \int_{0'8}^{\infty} 2e^{-2t} dt \\ &= 1 - e^{-2 \times 0'2} + e^{-2 \times 0'8} = 0'5315765 \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda} \leq 0'0001$$

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda} \leq 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda} \leq 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

$$-\lambda \leq \ln 0'0001$$

Ejercicio 4

Se ha diseñado un sensor para detectar obstáculos que puede servir de ayuda a las personas discapacitadas. El tiempo medio de respuesta del sensor es de 0'5 segundos.

- b) Calcula cuánto debería valer el tiempo medio de respuesta para que la probabilidad $P[T > 1]$ sea menor o igual a 0'0001.

$$P[T > 1] = \int_1^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda} \leq 0'0001$$

Aplicando logaritmo neperiano se obtiene:

$$-\lambda \leq \ln 0'0001$$

$$\lambda \geq -\ln 0'0001 = 9'21034$$