Ejercicios de contrastes mediante NP, KR, RV

18 de abril de 2024

1. Enunciados

1. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(5, p)$, de la que se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 30 con los siguientes resultados:

   (3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)

   a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis $H_0 : p = 0'50$ y $H_1 : p = 0'70$ al nivel de significación $\alpha = 0'05$ y calcula el p-valor del contraste.

   b) Contrasta $H_0 : p \leqslant 0'50$ y $H_1 : p > 0'50$ al nivel de significación $\alpha = 0'05$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

2. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica, $G(p)$, que contabiliza el número de pruebas hasta que aparece el primer éxito y de la que se extrajo una muestra de tamaño 40 con los siguientes resultados:

   1 2 4 5 6 7 8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39 7 5 4 1 1 1 3 3 4 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1

   a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis $H_0 : p = 0'50$ y $H_1 : p = 0'30$ al nivel de significación $\alpha = 0'05$ y calcula el p-valor del contraste.

   b) Contrasta $H_0 : p \geqslant 0'50$ y $H_1 : p < 0'35$ al nivel de significación $\alpha = 0'05$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

3. Sea X una variable aleatoria con distribución beta $\beta(a, 1)$ de la que se extrajo una muestra de tamaño 20 con los siguientes resultados:

   (0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)

   a) Contrasta las hipótesis $H_0 : a = 2$ y $H_1 : a = 2'3$ al nivel de significación $\alpha = 0'01$ y calcula el p-valor del contraste.

   b) Contrasta $H_0 : a \geqslant 2$ y $H_1 : a < 2$ al nivel de significación $\alpha = 0'01$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

4. Considera una población $X \equiv N(\mu, \sigma)$ con μ y σ desconocidas. Usa el test de la razón de verosimilitudes para contrastar:

   a) $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

   b) $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$.

   c) $H_0 : \sigma \leqslant \sigma_0$ frente a $H_1 : \sigma > \sigma_0$.

2. Resoluciones

1. Sea X una variable aleatoria con distribución $B(5, p)$, de la que se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 30 con los siguientes resultados:

   (3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)

   a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis $H_0 : p = 0'50$ y $H_1 : p = 0'70$ al nivel de significación $\alpha = 0'05$ y calcula el p-valor del contraste.

b) Contrasta $H_0 : p \leqslant 0\text{'}50$ y $H_1 : p > 0\text{'}50$ al nivel de significación $\alpha = 0\text{'}05$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

$$X \hookrightarrow B(5, p) \implies f = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x}$$

$$\implies \mathcal{L} = \prod \binom{5}{x_i} p^{\sum x_i} (1-p)^{5n - \sum x_i} \propto p^{\sum x_i} (1-p)^{5n-\sum x_i}$$

$$\implies \mathcal{L} \propto \left(\frac{p}{1-p} \right)^{\sum x_i} (1-p)^{5n}$$

Para el contraste $H_0 : p = 0\text{'}5$, $H_1 : p = 0\text{'}7$ se puede usar el lema de Neyman y Pearson:

$$\text{RC} = \left[\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} > k \right] = \left[\left(\frac{0\text{'}7/0\text{'}3}{0\text{'}5/0\text{'}5} \right)^{\sum x_i} > k' \right] = \left[\sum x_i > k'' \right]$$

$$H_0 \implies \sum X_i \hookrightarrow B(5n, 0\text{'}5)$$

```
> x <- c(3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,
         1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)
> (n <- length(x))
[1] 30
> (pvalor <- 1 - pbinom(sum(x)-.5, 5*n, .5))
[1] 0.5325193
```

Para el contraste $H_0 : p \leqslant 0\text{'}5$, $H_1 : p > 0\text{'}5$ se puede usar el teorema de Karlin y Rubin considerando la razón de verosimilitud monótona en $T = \sum X_i$. Sea $p_1 < p_2$. Entonces

$$\frac{\mathcal{L}(p_2)}{\mathcal{L}(p_1)} \propto \left(\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right)^t \quad \text{creciente en } t$$

porque $\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} = \frac{p_2}{p_1} \frac{1-p_1}{1-p_2} > \frac{p_2}{p_1} > 1$. Por tanto, la región crítica tiene la forma $[T > k]$ y el p-valor es el mismo que en el apartado anterior.

Para representar la función potencia:

```
> alfa <- .05
> k <- qbinom(1-alfa, 5*n, .5)
> potencia <- function (p) 1-pbinom(k-.5, 5*n, p)
> library(txtplot)
> txtplot(pes, potencia(pes))
```

```
    +--+---------+----------+----------+---------+----------+--+
  1 +                                   ********************   +
    |                                  **                      |
0.8 +                                  *                       +
    |                                 *                        |
    |                                 *                        |
0.6 +                                *                         +
    |                                *                         |
0.4 +                                                          +
    |                               *                          |
    |                               *                          |
0.2 +                              *                           +
    |                             **                           |
  0 +  ***************************                             +
    +--+---------+----------+----------+---------+----------+--+
       0        0.2        0.4        0.6       0.8         1
```

```
> pes <- seq(.45,.65,.01)
> txtplot(pes, potencia(pes))

  1 +--+------------+------------+------------+------------+---+
    |                                              *  *  * *   |
    |                                            *             |
0.8 +                                         *                +
    |                                      *                   |
    |                                    *                     |
0.6 +                                 *                        +
    |                               *                          |
0.4 +                                                          +
    |                            *                             |
    |                         *                                |
0.2 +                       *                                  +
    |                 *  *                                     |
  0 +  * *  *  * *  *                                          +
    +--+------------+------------+------------+------------+---+
     0.45          0.5         0.55          0.6         0.65
```

```
> pes <- seq(.45,.65,.001)
> txtplot(pes, potencia(pes))

  1 +--+------------+------------+------------+------------+---+
    |                                              *********   |
    |                                          *****           |
0.8 +                                       ****               +
    |                                     ***                  |
    |                                   ***                    |
0.6 +                                ***                       +
    |                              ***                         |
0.4 +                            ***                           +
    |                          ***                             |
    |                       ****                               |
0.2 +                    ****                                  +
    |                *****                                     |
  0 +  ***************                                         +
    +--+------------+------------+------------+------------+---+
     0.45          0.5         0.55          0.6         0.65
```

2. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica, $G(p)$, que contabiliza el número de pruebas hasta que aparece el primer éxito y de la que se extrajo una muestra de tamaño 40 con los siguientes resultados:

1 2 4 5 6 7 8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39 7 5 4 1 1 1 3 3 4 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1

   a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis $H_0 : p = 0\text{'}50$ y $H_1 : p = 0\text{'}30$ al nivel de significación $\alpha = 0\text{'}05$ y calcula el p-valor del contraste.

   b) Contrasta $H_0 : p \geqslant 0\text{'}50$ y $H_1 : p < 0\text{'}35$ al nivel de significación $\alpha = 0\text{'}05$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

$$
\begin{aligned}
X \hookrightarrow G(p) \quad &\Longrightarrow \quad f(x \mid p) = (1-p)^{x-1} p \cdot I(x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}) \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\vec{x} \mid p) = (1-p)^{\sum x_i} (1-p)^{-n} p^n \cdot I(\vec{x} \in \mathbb{N}^n)
\end{aligned}
$$

Omito a partir de ahora la indicatriz $I(\vec{x} \in \mathbb{N}^n)$.

Para $H_0 : p = 0\text{'}50$ y $H_1 : p = 0\text{'}30$ se tiene la región crítica

$$
\begin{aligned}
\text{R.C.} &= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{\mathcal{L}(\vec{x} \mid 0\text{'}3)}{\mathcal{L}(\vec{x} \mid 0\text{'}5)} > c \right\} \quad \exists\, c \\
&= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \frac{0\text{'}7^{\sum x_i} 0\text{'}7^{-n} 0\text{'}3^{n}}{0\text{'}5^{\sum x_i} 0\text{'}5^{-n} 0\text{'}5^{n}} > c \right\} \quad \exists\, c \\
&= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \left(\frac{0\text{'}7}{0\text{'}3}\right)^{\sum x_i} > c' \right\} \quad \exists\, c' \\
&= \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \sum x_i > c'' \right\} \quad \exists\, c'' \\
H_0 &\implies \sum_{i=1}^{n} X_i - n \;\hookrightarrow\; \text{BN}(n, 0\text{'}5) \\
&\implies c'' = n + \langle \text{cuantil } 1-\alpha \text{ de } \text{BN}(n, 0\text{'}5) \rangle = n + 53 \\
&\implies \text{p-valor} = \Pr\left[\text{BN}(n, 0\text{'}5) \geqslant \sum x_i - n \right] \approx 0 < \alpha
\end{aligned}
$$

Se rechaza por tanto la hipótesis nula. La forma de la región crítica tiene sentido porque $E(X) = 1/p$ y, a menor p, se esperan valores mayores de X.

```
> x <- scan()
1:     1  2  4  5  6  7  8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39
20:    7  5  4  1  1  1  3  3  4  1  1  1  1  2  1  1  1  1  1
39:
Read 38 items
> n <- length(x) # 38
> alfa <- 0.05
> qnbinom(1-alfa,n,0.5)
[1] 53
> sum(x)
[1] 327
> 1-pnbinom(327-n-0.5, n, 0.5)
[1] 0
```

Para $H_0 : p \geqslant 0\text{'}50$ y $H_1 : p < 0\text{'}35$, consideramos primeramente el contraste $H_0 : p \geqslant 0\text{'}50$ y $H_1 : p < 0\text{'}50$ para aplicar Karlin-Rubin. Sea $p_1 < p_2$. Entonces

$$
\frac{\mathcal{L}(p_2)}{\mathcal{L}(p_1)} = \frac{(1-p_2)^{\sum x_i}(1-p_2)^{-n} p_2^n}{(1-p_1)^{\sum x_i}(1-p_1)^{-n} p_1^n} \propto \left(\frac{1-p_2}{1-p_1}\right)^{\sum x_i} \text{ decreciente en } \sum x_i
$$

porque $\frac{1-p_2}{1-p_1} < 1$, luego hay razón de verosimilitud monótona[1] y la región crítica del contraste uniformemente más potente tiene[2] la forma $[\sum X_i > c]$. La hipótesi alternativa del enunciado implica un subconjunto de la del contraste K-R, por lo que nos sirve la misma región crítica para disponer del contraste uniformemente más potente. Por tanto, el p-valor sería

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\sum X_i \geqslant \sum x_i \;\middle|\; p = 0\text{'}5 \right] &= \Pr\left[\sum X_i - n \geqslant \sum x_i - n \;\middle|\; p = 0\text{'}5 \right] \\
&= \Pr\left[\text{BN}(n, 0\text{'}5) \geqslant \sum x_i - n \right] \approx 0
\end{aligned}
$$

como en el apartado anterior.

La representación de la función potencia en el espacio paramétrico $(0, 0\text{'}35) \cup [0\text{'}5, 1)$:

[1] Podría considerarse también que es creciente en $-\sum x_i$.

[2] Considérese:

- $H_1 : p > p_0$
  - $X \hookrightarrow B \implies \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}$ creciente en $\sum x_i \implies \text{R.C.} = [\sum x_i > c]$.
  - $X \hookrightarrow G \implies \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0}$ decreciente en $\sum x_i \implies \text{R.C.} = [\sum x_i < c]$.
- $H_1 : p < p_0$, $X \hookrightarrow G \implies \text{R.C.} = [\sum x_i > c]$.

```
> pot <- function (p) 1-pnbinom(53.5,n,p)
> pes <- c(seq(0,.35,.01),seq(.5,1,.01))
> txtplot(pes, pot(pes))

    +-+----------+---------+---------+--------+----------+--+
  1 +  *****************                                    +
    |                   *                                   |
0.8 +                                                       +
    |                                                       |
    |                                                       |
0.6 +                                                       +
    |                                                       |
0.4 +                                                       +
    |                                                       |
    |                                                       |
0.2 +                                                       +
    |                                                       |
  0 +                          **************************   +
    +-+----------+---------+---------+--------+----------+--+
      0         0.2       0.4       0.6      0.8         1
```

3. Sea X una variable aleatoria con distribución beta $\beta(a,1)$ de la que se extrajo una muestra de tamaño 20 con los siguientes resultados:

   (0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)

   a) Contrasta las hipótesis $H_0 : a = 2$ y $H_1 : a = 2'3$ al nivel de significación $\alpha = 0'01$ y calcula el p-valor del contraste.

   b) Contrasta $H_0 : a \geqslant 2$ y $H_1 : a < 2$ al nivel de significación $\alpha = 0'01$. Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

Para $H_0 : a = 2$, $H_1 : a = 2'3$ se usa Neyman-Pearson:

$$X \hookrightarrow \beta(a,1) \implies f \propto x^{a-1} \implies \mathcal{L} \propto \prod x_i^{a-1}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} \propto \prod x_i^{1'3} > c \iff \prod x_i > c'$$

Tiene sentido porque, a mayor a, más se acerca la distribución a 1.

Cálculo aproximado del p-valor mediante Montecarlo:

```
> x <- c(0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,
         0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)
> n <- length(x)
> mean (replicate(1e6,prod(rbeta(n,2,1))) >= prod(x))
[1] 0.042949
> mean (replicate(1e6,prod(rbeta(n,2,1))) >= prod(x))
[1] 0.042787
```

por lo que p-valor $\approx 0'043$.

Cálculo exacto del p-valor:

$$\prod x_i > c' \iff \sum \ln x_i > c'' \iff -\sum \ln x_i < c'''$$

$$X \hookrightarrow \beta(a,1) \implies -\ln X \hookrightarrow \mathrm{Exp}(a) \implies -\sum \ln X_i \hookrightarrow \gamma(n,a)$$

```
> pgamma(-sum(log(x)),n,2)
[1] 0.04298876
```

luego a nivel $\alpha = 0\text{'}01$ no se rechaza H_0.

Para $H_0 : a \geqslant 2$, $H_1 : a < 2$ se usa Karlin-Rubin. Sea $a_1 < a_2$. Entonces:

$$\frac{\mathcal{L}(a_2)}{\mathcal{L}(a_1)} \propto \prod x_i^{a_2 - a_1} \text{ es creciente en } \prod x_i \text{ porque } a_2 - a_1 > 0$$

luego R.C. $= \left[\prod x_i < c\right] = \left[-\sum \ln x_i > c'\right]$ y el p-valor es:

```
> 1 - pgamma(-sum(log(x)),n,2)
[1] 0.9570112
```

mucho mayor que α, luego no se rechaza H_0.

4. Considera una población $X \equiv N(\mu, \sigma)$ con μ y σ desconocidas. Usa el test de la razón de verosimilitudes para contrastar:

   a) $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$.
   b) $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$.
   c) $H_0 : \sigma \leqslant \sigma_0$ frente a $H_1 : \sigma > \sigma_0$.

Para $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu \neq \mu_0$:

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\hat{\mu}_{\mathrm{MV}} = \bar{x} \qquad \hat{\sigma}^2_{\mathrm{MV,H_0}} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \mu_0)^2 =: s_0^2 \qquad \hat{\sigma}^2_{\mathrm{MV,H_1}} = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

$$\Lambda = \frac{\mathcal{L}(\mu_0, s_0)}{\mathcal{L}(\bar{x}, s)} = \frac{\frac{1}{s_0^n\sqrt{2\pi}^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\mu_0)^2}{2s_0^2}}}{\frac{1}{s^n\sqrt{2\pi}^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\bar{x})^2}{2s^2}}} = \left(\frac{s^2}{s_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{s_0^2}{s^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} =$$

$$= \left(\frac{\sum(x_i - \bar{x} + \bar{x} - \mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \underbrace{\left(1 + \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)}_{>1}^{-\frac{n}{2}} < c \iff 1 + \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} > c' \iff$$

$$\iff \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}} \overset{H_0}{=} \frac{N(0,1)^2}{\chi^2_{n-1} \text{ indep.}} > c'' \iff$$

$$\iff \left(\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}} \text{ independientes}\right)^2 = t^2_{n-1} = F_{1,n-1} > c'''$$

por lo que equivale al habitual contraste t bilateral para una muestra basado en

$$\frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n-1}} \hookrightarrow t_{n-1}$$

Para $H_0 : \mu \leqslant \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$:

$$\Lambda = \begin{cases} 1 & \bar{x} \leqslant \mu_0 \\ \left(\frac{s^2}{s_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} & \bar{x} > \mu_0 \end{cases}$$

luego

$$\Lambda < c \iff \frac{\bar{x}-\mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} > t_{n-1,1-\alpha}$$

De nuevo, el caso habitual: contraste t unilateral.

Para $H_0 : \sigma \leqslant \sigma_0$ frente a $H_1 : \sigma > \sigma_0$:

$$\Lambda = \begin{cases} 1 & s \leqslant \sigma_0 \\ \frac{\mathcal{L}(\bar{x},\sigma_0)}{\mathcal{L}(\bar{x},s)} & s > \sigma_0 \end{cases}$$

Ahora,

$$\frac{\mathcal{L}(\bar{x},\sigma_0)}{\mathcal{L}(\bar{x},s)} = \frac{\frac{1}{\sigma_0^n \sqrt{2\pi}^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}}{\frac{1}{s^n \sqrt{2\pi}^n} e^{\frac{-\sum(x_i-\bar{x})^2}{2s^2}}} = \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\bar{x})^2\left(\frac{1}{\sigma_0^2}+\frac{1}{s^2}\right)} = \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}\frac{s^2}{\sigma_0^2}} e^{-\frac{n}{2}} =: g\left(\frac{s^2}{\sigma_0^2}\right)$$

con $g(x) = x^{n/2}e^{-nx/2}e^{-n/2}$.

```
> n <- 10
> g <- function (x) x^(n/2) * exp(-n*x/2) * exp(-n/2)
> library(txtplot)
> x <- seq (0, 10, .1)
> txtplot (x, g(x))
      +--+---------+----------+---------+----------+---------+--+
      |      **                                                 |
4e-05 +      * *                                                +
      |        *                                                |
      |     *   *                                               |
3e-05 +          *                                              +
      |     *                                                   |
      |          *                                              |
2e-05 +           *                                             +
      |    *      *                                             |
      |            *                                            |
1e-05 +    *       **                                           +
      |   *         **                                          |
    0 +  **           ****************************************  +
      +--+---------+----------+---------+----------+---------+--+
         0         2          4         6          8        10
> x <- seq (0, 3, .1)
> txtplot (x, g(x))
      +--+-------+--------+--------+--------+-------+--------+--+
      |                 * * *                                   |
4e-05 +                *      *                                 +
      |                        *                                |
      |              *           *                              |
3e-05 +                            *                            +
      |            *                                            |
      |                              *                          |
2e-05 +                               *                         +
      |          *                      *                       |
      |                                   *                     |
1e-05 +         *                           **                  +
      |       *                                * * *            |
    0 +  ** *                                       * * * ** *  +
      +--+-------+--------+--------+--------+-------+--------+--+
         0      0.5      1       1.5      2      2.5      3
>
```

Comprobemos que tiene un único máximo en $x = 1$:

```
Maxima 5.46.0 https://maxima.sourceforge.io
using Lisp ECL 21.2.1
Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.
```

```
Dedicated to the memory of William Schelter.
The function bug_report() provides bug reporting information.
(%i1) g(x) := x^(n/2) * exp(-n*x/2) * exp(-n/2) $
(%i2) diff(g(x),x) ;
                                   n x                      n x
                                (- ---) - n/2            (- ---) - n/2
                    n/2 - 1         2            n/2         2
                 n x         %e               n x    %e
(%o2)            ------------------------- - ----------------------
                             2                          2
(%i3) solve (%, x) ;
                                              n - 2
                                              -----
                                       n/2      2
(%o3)                                [x    = x     ]

(%i4) factor(%o2);
                                                    n x
                                                 (- ---) - n/2
                                       n/2 - 1       2
                          n (x - 1) x          %e
(%o4)                   - ----------------------------------
                                          2
(%i5) solve(%,x) ;
(%o5)                                [x = 0, x = 1]
```

Por tanto, la función es creciente hasta $x = 1$ y decreciente a partir de ahí, por lo que

$$\Lambda < c \iff \frac{s^2}{\sigma_0^2} < c_1 \cup \frac{s^2}{\sigma_0^2} > c_2 \iff s^2 < c_1 \ \cup \ s^2 > c_2$$

y la región crítica coincide con la del contraste intuitivo basado en $(n-1)\hat{S}/\sigma_0^2 \hookrightarrow \chi^2_{n-1}$.