

# Ejercicios de contrastes mediante NP, KR, RV

18 de abril de 2024

## 1. Enunciados

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $B(5, p)$ , de la que se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 30 con los siguientes resultados:

(3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)

- a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis  $H_0 : p = 0'50$  y  $H_1 : p = 0'70$  al nivel de significación  $\alpha = 0'05$  y calcula el p-valor del contraste.
- b) Contrasta  $H_0 : p \leq 0'50$  y  $H_1 : p > 0'50$  al nivel de significación  $\alpha = 0'05$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.
2. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución geométrica,  $G(p)$ , que contabiliza el número de pruebas hasta que aparece el primer éxito y de la que se extrajo una muestra de tamaño 40 con los siguientes resultados:

1 2 4 5 6 7 8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39 7 5 4 1 1 1 3 3 4 1 1 1 1 2 1 1 1 1 1

- a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis  $H_0 : p = 0'50$  y  $H_1 : p = 0'30$  al nivel de significación  $\alpha = 0'05$  y calcula el p-valor del contraste.
- b) Contrasta  $H_0 : p \geq 0'50$  y  $H_1 : p < 0'35$  al nivel de significación  $\alpha = 0'05$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.
3. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución beta  $\beta(a, 1)$  de la que se extrajo una muestra de tamaño 20 con los siguientes resultados:

(0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)

- a) Contrasta las hipótesis  $H_0 : a = 2$  y  $H_1 : a = 2'3$  al nivel de significación  $\alpha = 0'01$  y calcula el p-valor del contraste.
- b) Contrasta  $H_0 : a \geq 2$  y  $H_1 : a < 2$  al nivel de significación  $\alpha = 0'01$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.
4. Considera una población  $X \equiv N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidas. Usa el test de la razón de verosimilitudes para contrastar:

- a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .
- b)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu > \mu_0$ .
- c)  $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$  frente a  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ .

## 2. Resoluciones

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $B(5, p)$ , de la que se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño 30 con los siguientes resultados:

(3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)

- a) Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis  $H_0 : p = 0'50$  y  $H_1 : p = 0'70$  al nivel de significación  $\alpha = 0'05$  y calcula el p-valor del contraste.

b) Contrasta  $H_0 : p \leq 0.50$  y  $H_1 : p > 0.50$  al nivel de significación  $\alpha = 0.05$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

$$\begin{aligned}
 X &\hookrightarrow B(5, p) \implies f = \binom{5}{x} p^x (1-p)^{5-x} \\
 \implies \mathcal{L} &= \prod \binom{5}{x_i} p^{\sum x_i} (1-p)^{5n - \sum x_i} \propto p^{\sum x_i} (1-p)^{5n - \sum x_i} \\
 \implies \mathcal{L} &\propto \left(\frac{p}{1-p}\right)^{\sum x_i} (1-p)^{5n}
 \end{aligned}$$

Para el contraste  $H_0 : p = 0.5$ ,  $H_1 : p = 0.7$  se puede usar el lema de Neyman y Pearson:

$$\text{RC} = \left[ \frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} > k \right] = \left[ \left( \frac{0.7/0.3}{0.5/0.5} \right)^{\sum x_i} > k' \right] = \left[ \sum x_i > k'' \right]$$

$$H_0 \implies \sum X_i \hookrightarrow B(5n, 0.5)$$

```

> x <- c(3,2,3,4,1,4,3,4,4,3,4,2,1,2,4,
        1,1,0,3,2,2,4,2,2,4,3,2,3,1,1)
> (n <- length(x))
[1] 30
> (pvalor <- 1 - pbinom(sum(x)-.5, 5*n, .5))
[1] 0.5325193

```

Para el contraste  $H_0 : p \leq 0.5$ ,  $H_1 : p > 0.5$  se puede usar el teorema de Karlin y Rubin considerando la razón de verosimilitud monótona en  $T = \sum X_i$ . Sea  $p_1 < p_2$ . Entonces

$$\frac{\mathcal{L}(p_2)}{\mathcal{L}(p_1)} \propto \left( \frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} \right)^t \quad \text{creciente en } t$$

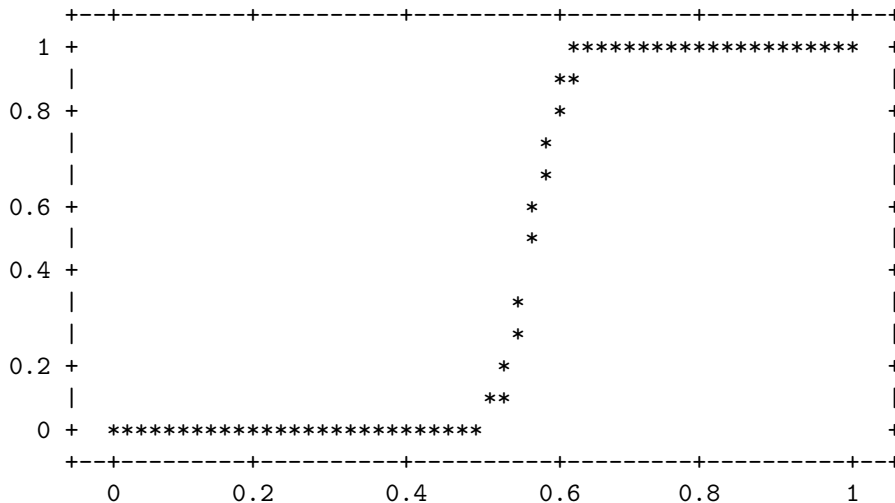
porque  $\frac{p_2/(1-p_2)}{p_1/(1-p_1)} = \frac{p_2}{p_1} \frac{1-p_1}{1-p_2} > \frac{p_2}{p_1} > 1$ . Por tanto, la región crítica tiene la forma  $[T > k]$  y el p-valor es el mismo que en el apartado anterior.

Para representar la función potencia:

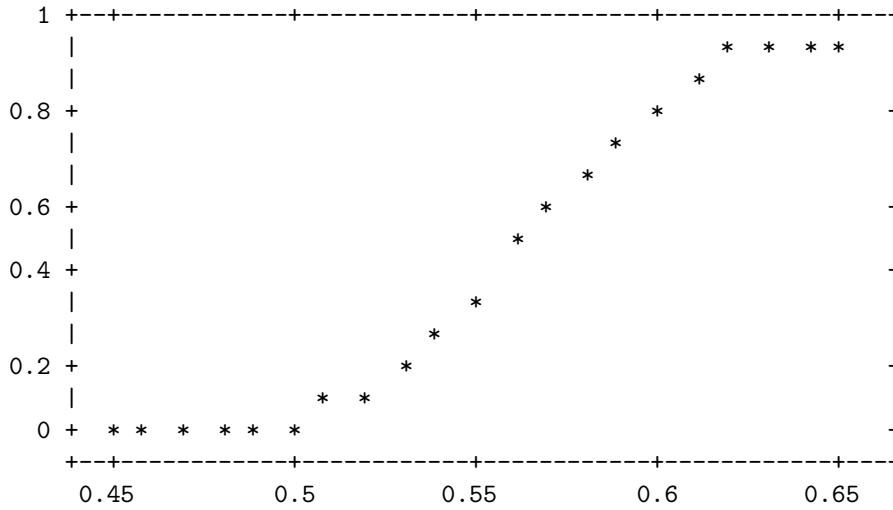
```

> alfa <- .05
> k <- qbinom(1-alfa, 5*n, .5)
> potencia <- function (p) 1-pbinom(k-.5, 5*n, p)
> library(txtplot)
> txtplot(pes, potencia(pes))

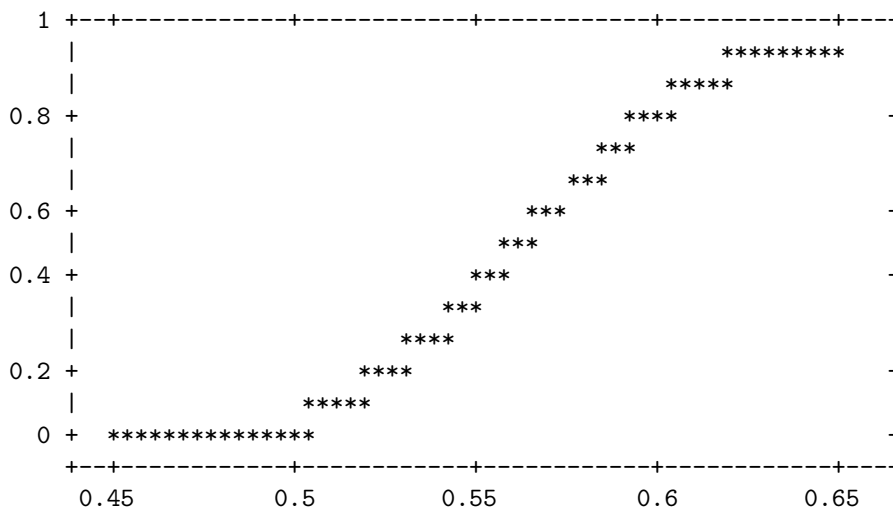
```



```
> pes <- seq(.45,.65,.01)
> txtplot(pes, potencia(pes))
```



```
> pes <- seq(.45,.65,.001)
> txtplot(pes, potencia(pes))
```



2. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución geométrica,  $G(p)$ , que contabiliza el número de pruebas hasta que aparece el primer éxito y de la que se extrajo una muestra de tamaño 40 con los siguientes resultados:

1 2 4 5 6 7 8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39 7 5 4 1 1 1 3 3 4 1 1 1 1 2 1 1 1 1

- Aplica el método de Neyman-Pearson para contrastar las hipótesis  $H_0 : p = 0.50$  y  $H_1 : p = 0.30$  al nivel de significación  $\alpha = 0.05$  y calcula el p-valor del contraste.
- Contrasta  $H_0 : p \geq 0.50$  y  $H_1 : p < 0.35$  al nivel de significación  $\alpha = 0.05$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

$$\begin{aligned}
 X \hookrightarrow G(p) &\implies f(x | p) = (1 - p)^{x-1} p \cdot I(x \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}) \\
 &\implies \mathcal{L}(\vec{x} | p) = (1 - p)^{\sum x_i} (1 - p)^{-n} p^n \cdot I(\vec{x} \in \mathbb{N}^n)
 \end{aligned}$$

Omito a partir de ahora la indicatriz  $I(\vec{x} \in \mathbb{N}^n)$ .

Para  $H_0 : p = 0'50$  y  $H_1 : p = 0'30$  se tiene la región crítica

$$\begin{aligned}
 \text{R.C.} &= \left\{ \bar{x} \mid \frac{\mathcal{L}(\bar{x} \mid 0'3)}{\mathcal{L}(\bar{x} \mid 0'5)} > c \right\} \quad \exists c \\
 &= \left\{ \bar{x} \mid \frac{0'7^{\sum x_i} 0'7^{-n} 0'3^n}{0'5^{\sum x_i} 0'5^{-n} 0'5^n} > c \right\} \quad \exists c \\
 &= \left\{ \bar{x} \mid \left( \frac{0'7}{0'5} \right)^{\sum x_i} > c' \right\} \quad \exists c' \\
 &= \left\{ \bar{x} \mid \sum x_i > c'' \right\} \quad \exists c'' \\
 H_0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i - n \hookrightarrow \text{BN}(n, 0'5) \\
 &\Rightarrow c'' = n + \langle \text{cuantil } 1 - \alpha \text{ de BN}(n, 0'5) \rangle = n + 53 \\
 &\Rightarrow \text{p-valor} = \Pr \left[ \text{BN}(n, 0'5) \geq \sum x_i - n \right] \approx 0 < \alpha
 \end{aligned}$$

Se rechaza por tanto la hipótesis nula. La forma de la región crítica tiene sentido porque  $E(X) = 1/p$  y, a menor  $p$ , se esperan valores mayores de  $X$ .

```

> x <- scan()
1:      1  2  4  5  6  7  8 10 12 13 14 16 17 19 24 29 30 31 39
20:     7  5  4  1  1  1  3  3  4  1  1  1  1  2  1  1  1  1  1
39:
Read 38 items
> n <- length(x) # 38
> alfa <- 0.05
> qnbinom(1-alfa,n,0.5)
[1] 53
> sum(x)
[1] 327
> 1-pnbinom(327-n-0.5, n, 0.5)
[1] 0

```

Para  $H_0 : p \geq 0'50$  y  $H_1 : p < 0'35$ , consideramos primeramente el contraste  $H_0 : p \geq 0'50$  y  $H_1 : p < 0'50$  para aplicar Karlin-Rubin. Sea  $p_1 < p_2$ . Entonces

$$\frac{\mathcal{L}(p_2)}{\mathcal{L}(p_1)} = \frac{(1-p_2)^{\sum x_i} (1-p_2)^{-n} p_2^n}{(1-p_1)^{\sum x_i} (1-p_1)^{-n} p_1^n} \propto \left( \frac{1-p_2}{1-p_1} \right)^{\sum x_i} \text{ decreciente en } \sum x_i$$

porque  $\frac{1-p_2}{1-p_1} < 1$ , luego hay razón de verosimilitud monótona<sup>1</sup> y la región crítica del contraste uniformemente más potente tiene<sup>2</sup> la forma  $[\sum X_i > c]$ . La hipótesis alternativa del enunciado implica un subconjunto de la del contraste K-R, por lo que nos sirve la misma región crítica para disponer del contraste uniformemente más potente. Por tanto, el p-valor sería

$$\begin{aligned}
 \Pr \left[ \sum X_i \geq \sum x_i \mid p = 0'5 \right] &= \Pr \left[ \sum X_i - n \geq \sum x_i - n \mid p = 0'5 \right] \\
 &= \Pr \left[ \text{BN}(n, 0'5) \geq \sum x_i - n \right] \approx 0
 \end{aligned}$$

como en el apartado anterior.

La representación de la función potencia en el espacio paramétrico  $(0, 0'35) \cup [0'5, 1)$ :

<sup>1</sup>Podría considerarse también que es creciente en  $-\sum x_i$ .

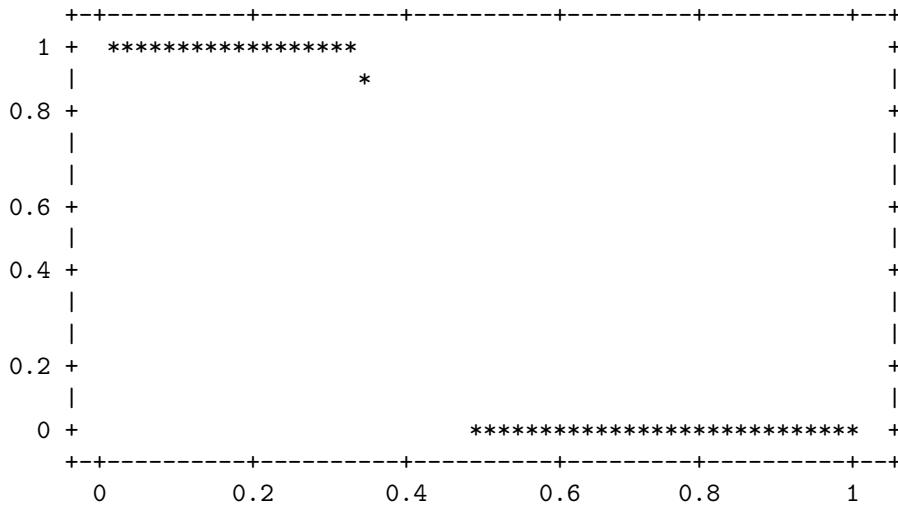
<sup>2</sup>Considérese:

- $H_1 : p > p_0$ 
  - $X \hookrightarrow B \implies \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0}$  creciente en  $\sum x_i \implies \text{R.C.} = [\sum x_i > c]$ .
  - $X \hookrightarrow G \implies \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0}$  decreciente en  $\sum x_i \implies \text{R.C.} = [\sum x_i < c]$ .
- $H_1 : p < p_0, X \hookrightarrow G \implies \text{R.C.} = [\sum x_i > c]$ .

```

> pot <- function (p) 1-pnbinom(53.5,n,p)
> pes <- c(seq(0,.35,.01),seq(.5,1,.01))
> txtplot(pes, pot(pes))

```



3. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución beta  $\beta(a, 1)$  de la que se extrajo una muestra de tamaño 20 con los siguientes resultados:

(0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)

- Contrasta las hipótesis  $H_0 : a = 2$  y  $H_1 : a = 2'3$  al nivel de significación  $\alpha = 0'01$  y calcula el p-valor del contraste.
- Contrasta  $H_0 : a \geq 2$  y  $H_1 : a < 2$  al nivel de significación  $\alpha = 0'01$ . Calcula el p-valor del contraste y representa la función potencia.

Para  $H_0 : a = 2, H_1 : a = 2'3$  se usa Neyman-Pearson:

$$X \hookrightarrow \beta(a, 1) \implies f \propto x^{a-1} \implies \mathcal{L} \propto \prod x_i^{a-1}$$

$$\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_0} \propto \prod x_i^{1'3} > c \iff \prod x_i > c'$$

Tiene sentido porque, a mayor  $a$ , más se acerca la distribución a 1.

Cálculo aproximado del p-valor mediante Montecarlo:

```

> x <- c(0.96,0.83,0.49,0.35,0.76,0.76,0.92,0.98,0.43,0.91,
        0.77,0.97,0.51,0.53,0.59,0.66,0.96,0.94,0.78,0.97)
> n <- length(x)
> mean (replicate(1e6,prod(rbeta(n,2,1))) >= prod(x))
[1] 0.042949
> mean (replicate(1e6,prod(rbeta(n,2,1))) >= prod(x))
[1] 0.042787

```

por lo que p-valor  $\approx 0'043$ .

Cálculo exacto del p-valor:

$$\prod x_i > c' \iff \sum \ln x_i > c'' \iff -\sum \ln x_i < c'''$$

$$X \hookrightarrow \beta(a, 1) \implies -\ln X \hookrightarrow \text{Exp}(a) \implies -\sum \ln X_i \hookrightarrow \gamma(n, a)$$

```

> pgamma(-sum(log(x)), n, 2)
[1] 0.04298876

```

luego a nivel  $\alpha = 0.01$  no se rechaza  $H_0$ .

Para  $H_0 : a \geq 2$ ,  $H_1 : a < 2$  se usa Karlin-Rubin. Sea  $a_1 < a_2$ . Entonces:

$$\frac{\mathcal{L}(a_2)}{\mathcal{L}(a_1)} \propto \prod x_i^{a_2 - a_1} \text{ es creciente en } \prod x_i \text{ porque } a_2 - a_1 > 0$$

luego R.C. =  $[\prod x_i < c] = [-\sum \ln x_i > c']$  y el p-valor es:

$> 1 - \text{pgamma}(-\text{sum}(\log(x)), n, 2)$

[1] 0.9570112

mucho mayor que  $\alpha$ , luego no se rechaza  $H_0$ .

4. Considera una población  $X \equiv N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidas. Usa el test de la razón de verosimilitudes para contrastar:

a)  $H_0 : \mu = \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

b)  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu > \mu_0$ .

c)  $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$  frente a  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ .

Para  $H_0 : \mu = \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ :

$$f = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{\sigma^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\hat{\mu}_{MV} = \bar{x} \quad \hat{\sigma}_{MV,H_0}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \mu_0)^2 =: s_0^2 \quad \hat{\sigma}_{MV,H_1}^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = s^2$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\mathcal{L}(\mu_0, s_0)}{\mathcal{L}(\bar{x}, s)} = \frac{\frac{1}{s_0^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{2s_0^2}}}{\frac{1}{s^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{2s^2}}} = \left(\frac{s^2}{s_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{s_0^2}{s^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \left(\frac{\sum(x_i-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \\ &= \left(\frac{\sum(x_i-\bar{x}+\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}} = \underbrace{\left(1 + \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)^{-\frac{n}{2}}}_{>1} < c \iff 1 + \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} > c' \iff \\ &\iff \frac{\sum(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sum(x_i-\bar{x})^2} = \frac{\left(\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right)^2}{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{\sigma_0^2}} \stackrel{H_0}{=} \frac{N(0,1)^2}{\chi_{n-1}^2} > c'' \iff \\ &\iff \left(\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi_{n-1}^2}{n-1}}}\right)^2 = t_{n-1}^2 = F_{1,n-1} > c''' \end{aligned}$$

por lo que equivale al habitual contraste  $t$  bilateral para una muestra basado en

$$\frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n-1}} \hookrightarrow t_{n-1}$$

Para  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  frente a  $H_1 : \mu > \mu_0$ :

$$\Lambda = \begin{cases} 1 & \bar{x} \leq \mu_0 \\ \left(\frac{s^2}{s_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} & \bar{x} > \mu_0 \end{cases}$$

luego

$$\Lambda < c \iff \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s}/\sqrt{n}} > t_{n-1, 1-\alpha}$$

De nuevo, el caso habitual: contraste  $t$  unilateral.

Para  $H_0 : \sigma \leq \sigma_0$  frente a  $H_1 : \sigma > \sigma_0$ :

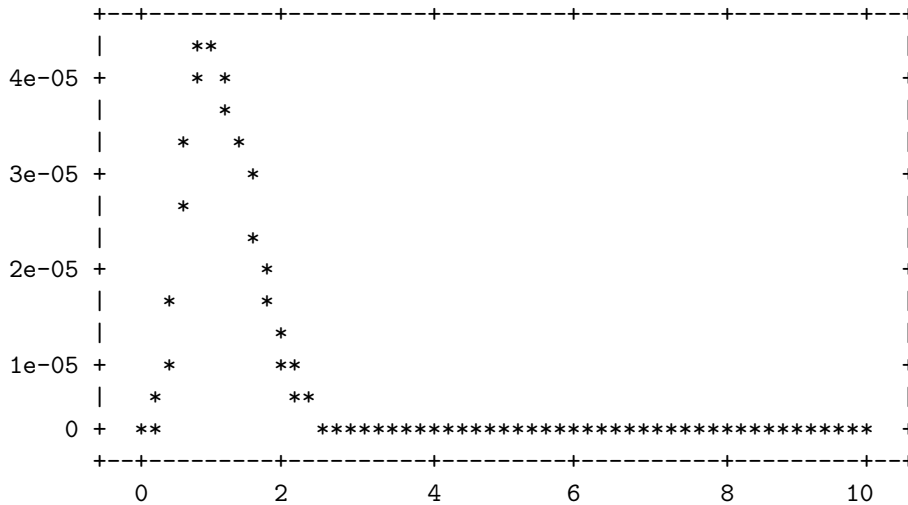
$$\Lambda = \begin{cases} 1 & s \leq \sigma_0 \\ \frac{\mathcal{L}(\bar{x}, \sigma_0)}{\mathcal{L}(\bar{x}, s)} & s > \sigma_0 \end{cases}$$

Ahora,

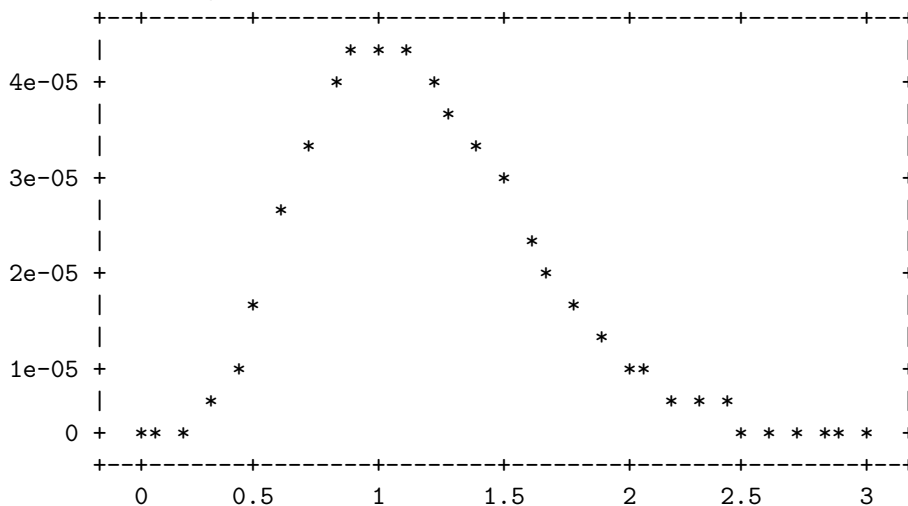
$$\frac{\mathcal{L}(\bar{x}, \sigma_0)}{\mathcal{L}(\bar{x}, s)} = \frac{\frac{1}{\sigma_0^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma_0^2}}}{\frac{1}{s^n \sqrt{2\pi}^n} e^{-\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2s^2}}} = \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)^n e^{-\frac{1}{2} \sum(x_i - \bar{x})^2 \left(\frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{s^2}\right)} = \left(\frac{s^2}{\sigma_0^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2} \frac{s^2}{\sigma_0^2}} e^{-\frac{n}{2}} =: g\left(\frac{s^2}{\sigma_0^2}\right)$$

con  $g(x) = x^{n/2} e^{-nx/2} e^{-n/2}$ .

```
> n <- 10
> g <- function (x) x^(n/2) * exp(-n*x/2) * exp(-n/2)
> library(txtplot)
> x <- seq (0, 10, .1)
> txtplot (x, g(x))
```



```
> x <- seq (0, 3, .1)
> txtplot (x, g(x))
```



>

Comprobemos que tiene un único máximo en  $x = 1$ :

Maxima 5.46.0 <https://maxima.sourceforge.io>  
using Lisp ECL 21.2.1

Distributed under the GNU Public License. See the file COPYING.

Dedicated to the memory of William Schelter.

The function bug\_report() provides bug reporting information.

(%i1) g(x) := x^(n/2) \* exp(-n\*x/2) \* exp(-n/2) \$

(%i2) diff(g(x),x) ;

(%o2) 
$$\frac{x^{n/2-1} e^{-nx/2} (-\frac{nx}{2} - n/2) - x^{n/2} e^{-nx/2} (-\frac{nx}{2} - n/2)}{2}$$

(%i3) solve(%, x) ;

(%o3) 
$$[x = x^{\frac{n-2}{2}}]$$

(%i4) factor(%o2);

(%o4) 
$$-\frac{n(x-1)x^{\frac{n}{2}-1} e^{-nx/2}}{2}$$

(%i5) solve(%,x) ;

(%o5) [x = 0, x = 1]

Por tanto, la función es creciente hasta  $x = 1$  y decreciente a partir de ahí, por lo que

$$\Lambda < c \iff \frac{s^2}{\sigma_0^2} < c_1 \cup \frac{s^2}{\sigma_0^2} > c_2 \iff s^2 < c_1 \cup s^2 > c_2$$

y la región crítica coincide con la del contraste intuitivo basado en  $(n-1)\hat{S}/\sigma_0^2 \leftrightarrow \chi_{n-1}^2$ .