Enunciado

Sea $X \equiv \text{Exp}(\lambda)$ de la que se extrae una muestra de tamaño n $(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Calcula un estadístico suficiente y minimal.
2. Calcula el EMV.
3. Calcula la distribución exacta del EMV.
4. Calcula la esperanza del EMV.
5. Calcula su distribución asintótica.

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Luego $S = \sum X_i$ sería un estadístico suficiente.

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Luego $S = \sum X_i$ sería un estadístico suficiente.

Para ver que es minimal:

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Luego $S = \sum X_i$ sería un estadístico suficiente.

Para ver que es minimal:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \frac{L_\lambda(\vec{x})}{L_\lambda(\vec{y})} \text{ indep. de } \lambda$$

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Luego $S = \sum X_i$ sería un estadístico suficiente.

Para ver que es minimal:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \frac{L_\lambda(\vec{x})}{L_\lambda(\vec{y})} \text{ indep. de } \lambda$$

$$\frac{L_\lambda(\vec{x})}{L_\lambda(\vec{y})} = e^{-\lambda(\sum x_i - \sum y_i)} \text{ indep. de } \lambda \text{ sii } \sum x_i = \sum y_i$$

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i} = \lambda^n e^{-\lambda \cdot s}$$

Luego $S = \sum X_i$ sería un estadístico suficiente.

Para ver que es minimal:

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff \frac{L_\lambda(\vec{x})}{L_\lambda(\vec{y})} \text{ indep. de } \lambda$$

$$\frac{L_\lambda(\vec{x})}{L_\lambda(\vec{y})} = e^{-\lambda(\sum x_i - \sum y_i)} \text{ indep. de } \lambda \text{ sii } \sum x_i = \sum y_i$$

luego S es suficiente y minimal.

Calcula el EMV.

Calcula el EMV.

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

Calcula el EMV.

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

$$u(\vec{x}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i$$

Calcula el EMV.

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum x_i$$

$$u(\vec{x}, \theta) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \ln L = \frac{n}{\lambda} - \sum x_i$$

$$\frac{n}{\hat{\lambda}} - \sum x_i = 0 \iff \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum x_i} = \frac{1}{\bar{x}}$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = \frac{1}{\bar{X}} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \in \operatorname{sop} T = (0, \infty), \quad \mathrm{P}\left[T \leq t\right] =$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = \frac{1}{\bar{X}} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \in \text{sop } T = (0, \infty), \quad \mathrm{P}\,[T \leq t] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\frac{1}{\bar{X}} \leq t\right] = \mathrm{P}\left[\frac{1}{t} \leq \frac{\sum X_i}{n}\right] = \mathrm{P}\left[\sum X_i \geq \frac{n}{t}\right]$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = \frac{1}{\bar{X}} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \in \operatorname{sop} T = (0, \infty), \quad \mathrm{P}\left[T \leq t\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\frac{1}{\bar{X}} \leq t\right] = \mathrm{P}\left[\frac{1}{t} \leq \frac{\sum X_i}{n}\right] = \mathrm{P}\left[\sum X_i \geq \frac{n}{t}\right]$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left[\gamma(n, \lambda) \leq \frac{n}{t}\right] = 1 - F_{\gamma(n,\lambda)}\left(\frac{n}{t}\right)$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = \frac{1}{\bar{X}} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \in \text{sop } T = (0, \infty), \quad \mathrm{P}\left[T \le t\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\frac{1}{\bar{X}} \le t\right] = \mathrm{P}\left[\frac{1}{t} \le \frac{\sum X_i}{n}\right] = \mathrm{P}\left[\sum X_i \ge \frac{n}{t}\right]$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left[\gamma(n, \lambda) \le \frac{n}{t}\right] = 1 - F_{\gamma(n,\lambda)}\left(\frac{n}{t}\right)$$

$$f_T(t) = \frac{n}{t^2} \cdot f_{\gamma(n,\lambda)}\left(\frac{n}{t}\right) = \frac{n}{t^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda \frac{n}{t}} \left(\frac{n}{t}\right)^{n-1}$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = \frac{1}{\bar{X}} \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \in \operatorname{sop} T = (0,\infty), \quad \mathrm{P}\left[T \le t\right] =$$

$$= \mathrm{P}\left[\frac{1}{\bar{X}} \le t\right] = \mathrm{P}\left[\frac{1}{t} \le \frac{\sum X_i}{n}\right] = \mathrm{P}\left[\sum X_i \ge \frac{n}{t}\right]$$

$$= 1 - \mathrm{P}\left[\gamma(n,\lambda) \le \frac{n}{t}\right] = 1 - F_{\gamma(n,\lambda)}\left(\frac{n}{t}\right)$$

$$f_T(t) = \frac{n}{t^2} \cdot f_{\gamma(n,\lambda)}\left(\frac{n}{t}\right) = \frac{n}{t^2} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda \frac{n}{t}} \left(\frac{n}{t}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1}$$

Calcula su esperanza.

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n \cdot \lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right)^{-1} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n \cdot \lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right)^{-1} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n \cdot \lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n \cdot \lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n} dt$$

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right)^{-1} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n} dt$$

$$u = \frac{1}{t} \quad ; \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \quad ; \quad dt = -t^2 \cdot du = -\frac{1}{u^2} du$$

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^\infty t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{1}{t}\right)^{-1} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n} dt$$

$$u = \frac{1}{t} \quad ; \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \quad ; \quad dt = -t^2 \cdot du = -\frac{1}{u^2} du$$

$$= \int_\infty^0 \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^n \frac{-1}{u^2} du$$

Calcula su esperanza.

$$E(T) = \int_0^{\infty} t \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^{-1} \cdot \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n+1} dt$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-\frac{n\cdot\lambda}{t}} \left(\frac{1}{t}\right)^{n} dt$$

$$u = \frac{1}{t} \quad ; \quad du = \frac{-1}{t^2} dt \quad ; \quad dt = -t^2 \cdot du = -\frac{1}{u^2} du$$

$$= \int_{\infty}^{0} \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^n \frac{-1}{u^2} du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^n \frac{1}{u^2} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{n-2} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{n-2} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{n-2} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{n-2} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^{n-2} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda\cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)} e^{-n\lambda\cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} e^{-n\lambda\cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

Calcula su esperanza.

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{n-2} du$$

$$= \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= n\lambda \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{(n-1)\Gamma(n-1)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= \frac{n\lambda}{n-1} \int_0^\infty \frac{(n\lambda)^{n-1}}{\Gamma(n-1)} e^{-n\lambda \cdot u} u^{(n-1)-1} du$$

$$= \frac{n}{n-1} \lambda$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

$$f(x, \lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

$$f(x, \lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\ln f(x, \lambda) = \ln \lambda - \lambda \cdot x$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

$$f(x,\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\ln f(x,\lambda) = \ln \lambda - \lambda \cdot x$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

$$f(x,\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\ln f(x,\lambda) = \ln \lambda - \lambda \cdot x$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln f(x,\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2} \Longrightarrow I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Por tanto,

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando las propiedades del EMV:

$$\sqrt{n}(T-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sqrt{I(\lambda)^{-1}})$$

$$f(x,\lambda) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

$$\ln f(x,\lambda) = \ln \lambda - \lambda \cdot x$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \ln f(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda} - x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \ln f(x,\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2} \Longrightarrow I(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Por tanto, $\sqrt{n}(T-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0; \sqrt{(1/\lambda^2)^{-1}}) = N(0;\lambda)$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

$$X \equiv \mathrm{Exp}(\lambda) \Longrightarrow \bar{X} \overset{\text{TCL}}{\equiv} N(\mu, \mu/\sqrt{n}) \text{ con } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

$$X \equiv \text{Exp}(\lambda) \Longrightarrow \bar{X} \overset{\text{TCL}}{\equiv} N(\mu, \mu/\sqrt{n}) \text{ con } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0; \mu)$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

$$X \equiv \text{Exp}(\lambda) \Longrightarrow \bar{X} \overset{\text{TCL}}{\equiv} N(\mu, \mu/\sqrt{n}) \text{ con } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0; \mu)$$

$$T = \frac{1}{\bar{X}} = g(\bar{X}) \qquad ; \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad ; \qquad g'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

$$X \equiv \mathrm{Exp}(\lambda) \Longrightarrow \bar{X} \overset{\mathrm{TCL}}{\equiv} N(\mu, \mu/\sqrt{n}) \text{ con } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0; \mu)$$

$$T = \frac{1}{\bar{X}} = g(\bar{X}) \qquad ; \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad ; \qquad g'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\sqrt{n}(T - \lambda) = \sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\mu)\big) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

Calcula su distribución asintótica.

Aplicando el método delta:

$$X \equiv \mathrm{Exp}(\lambda) \Longrightarrow \bar{X} \overset{\mathrm{TCL}}{\equiv} N(\mu, \mu/\sqrt{n}) \text{ con } \mu = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sqrt{n}(\bar{X} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0; \mu)$$

$$T = \frac{1}{\bar{X}} = g(\bar{X}) \qquad ; \qquad g(x) = \frac{1}{x} \qquad ; \qquad g'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$\sqrt{n}(T - \lambda) = \sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\mu)\big) \xrightarrow{\mathcal{L}}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} N\left(0; \mu \left|\frac{-1}{\mu^2}\right|\right) = N\left(0; \frac{1}{\mu}\right) = N(0; \lambda)$$