Enunciado

Sea $X \equiv U(0, \theta)$ de la que se extrae una m.a.s. $(X_1, ..., X_n)$.

1. Calcula un estadístico suficiente y minimal.
2. Calcula el EMV.
3. Calcula la distribución exacta del EMV.
4. Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.
5. Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(\vec{x},\theta) = \prod \frac{1}{\theta} I(x_i \leq \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I(x_{(n)} \leq \theta)$$

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(\vec{x}, \theta) = \prod \frac{1}{\theta} I(x_i \leq \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I(x_{(n)} \leq \theta)$$

$X_{(n)}$ es suficiente y minimal:

Calcula un estadístico suficiente y minimal.

$$L(\vec{x},\theta) = \prod \frac{1}{\theta} I(x_i \leq \theta) = \left(\frac{1}{\theta}\right)^n I(x_{(n)} \leq \theta)$$

$X_{(n)}$ es suficiente y minimal:

$$\frac{L(\vec{x},\theta)}{L(\vec{y},\theta)} = \frac{I(x_{(n)} \leq \theta)}{I(y_{(n)} \leq \theta)} \text{ indep. de } \theta \iff x_{(n)} = y_{(n)}$$

Calcula el EMV.

Calcula el EMV.

$$\sup_{\theta} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \cdot I(x_{(n)} \leq \theta)$$

Calcula el EMV.

$$\sup_{\theta} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \cdot I(x_{(n)} \leq \theta)$$

La muestra es compatible sólo con los valores del parámetro que verifican $\theta \geq x_{(n)}$.

Calcula el EMV.

$$\sup_{\theta} \left(\frac{1}{\theta}\right)^{n} \cdot I(x_{(n)} \leq \theta)$$

La muestra es compatible sólo con los valores del parámetro que verifican $\theta \geq x_{(n)}$.
Como θ aparece en el denominador de la verosimilitud, se elige el menor valor, es decir,

Calcula el EMV.

$$\sup_{\theta} \left(\frac{1}{\theta}\right)^n \cdot I(x_{(n)} \leq \theta)$$

La muestra es compatible sólo con los valores del parámetro que verifican $\theta \geq x_{(n)}$.
Como θ aparece en el denominador de la verosimilitud, se elige el menor valor, es decir,

$$\hat{\theta} = X_{(n)}$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = X_{(n)}$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = X_{(n)}$$

$$\mathrm{P}\left[T \leq t\right] = \mathrm{P}\left[X_{(n)} \leq t\right] = \mathrm{P}\left[\bigcap X_i \leq t\right] = \left[F(t)\right]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

Calcula la distribución exacta del EMV.

$$T = X_{(n)}$$

$$\mathrm{P}\left[T \leq t\right] = \mathrm{P}\left[X_{(n)} \leq t\right] = \mathrm{P}\left[\bigcap X_i \leq t\right] = \left[F(t)\right]^n = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n$$

$$f_T(t) = \frac{n}{\theta^n} \cdot t^{n-1} \qquad 0 \leq t \leq \theta$$

Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.

Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.

$$E(T) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t \cdot t^{n-1} \cdot dt =$$

Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.

$$E(T) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t \cdot t^{n-1} \cdot dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt =$$

Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.

$$E(T) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t \cdot t^{n-1} \cdot dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_0^\theta =$$

Demuestra que su esperanza es $\frac{n\theta}{n+1}$.

$$E(T) = \int_0^\theta \frac{n}{\theta^n} t \cdot t^{n-1} \cdot dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta t^n dt =$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \left. \frac{t^{n+1}}{n+1} \right|_0^\theta =$$

$$= \frac{n}{n+1}\theta \text{ (No es centrado.)}$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \leq y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \leq \frac{y}{n}\right] =$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \leq y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \leq \frac{y}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[X_{(n)} \geq \theta - \frac{y}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \le y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \le \frac{y}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[X_{(n)} \ge \theta - \frac{y}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \leq y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \leq \frac{y}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[X_{(n)} \geq \theta - \frac{y}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{y/\theta}{n}\right)^n =$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \le y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \le \frac{y}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[X_{(n)} \ge \theta - \frac{y}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{y/\theta}{n}\right)^n =$$

$$= 1 - e^{-y/\theta}$$

Calcula la distribución asintótica de $n(\theta - X_{(n)})$.

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[n(\theta - X_{(n)}) \leq y\right] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[\theta - X_{(n)} \leq \frac{y}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left[X_{(n)} \geq \theta - \frac{y}{n}\right] = \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n = 1 - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta - \frac{y}{n}}{\theta}\right)^n =$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{y/\theta}{n}\right)^n =$$

$$= 1 - e^{-y/\theta}$$

$$f(y) = \frac{1}{\theta} e^{-y/\theta} \equiv \text{ Exponencial } (1/\theta)$$