Ejercicios del tema 2

Inferencia Estadística

30 de noviembre de 2024

1. Define estadístico suficiente y minimal suficiente para una familia de distribuciones.

2. Da un ejemplo de estadístico que sea suficiente pero no minimal en la familia Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

3. Dada una muestra aleatoria simple de tamaño n de una variable aleatoria continua X con función de densidad f, calcula la distribución del estadístico ordenado $X_{(2)}$, de orden 2. Calcula la esperanza y varianza de $X_{(2)}$ si X sigue una distribución exponencial.

4. Define función pivote y explica para qué se utiliza.

   Dada la siguiente muestra aleatoria simple de una variable X con distribución $\text{Exp}(\lambda)$:

   (2.39, 1.83, 0.23, 0.93, 2.64, 2.61, 1.82, 2.88, 0.52, 0.50, 0.51, 0.32, 0.41, 1.67, 0.45, 0.82)

   resuelve los siguientes apartados:

   a) Calcula el EMV de λ y estudia sus propiedades.

   b) Busca una función pivote para el parámetro λ y calcula un intervalo de confianza a partir de la muestra anterior.

5. Enuncia el método delta, explica para qué se utiliza y aplícalo en la construcción de un intervalo de confianza para λ a partir de una variable con distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ y la siguiente muestra de tamaño 20:

valores	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
frecuencias	1	3	4	4	4	3	2	5	1	3

6. La proporción de horas/día con un nivel de contaminación que no representa un riesgo para la salud es una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x, \theta) = \frac{2(1-x)}{(1-\theta)^2} I(\theta \leq x \leq 1)$$

   Resuelve los siguientes apartados con la información dada por la muestra aleatoria simple:

   (0.29, 0.77, 0.47, 0.35, 0.30, 0.57, 0.61, 0.52, 0.71, 0.20, 0.32, 0.47, 0.13, 0.40, 0.12, 0.36, 0.83)

   a) Busca un estadístico suficiente para θ.

   b) Determina el estimador de máxima verosimilitud de θ, su valor esperado y la estimación correspondiente.

   c) Calcula el estimador de θ por el método de los momentos.

d) Compara el estimador de máxima verosimilitud y el de los momentos.

e) Busca una función pivote y calcula un intervalo de confianza para θ con coeficiente de confianza 0,95.

Calcula, de manera aproximada, el tamaño de muestra para garantizar que la longitud del intervalo sea inferior a L.

7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \frac{x}{\theta} \exp\left(\frac{-x^2}{2\theta}\right) I(x > 0)$$

donde $\theta > 0$. Resuelve los siguientes apartados:

a) Genera aleatoriamente el valor de θ a partir de una $\mathcal{U}(1, 2)$.

b) Genera una muestra aleatoria simple, de tamaño 10, de la variable X, empleando el valor del parámetro obtenido en el apartado anterior.

c) Demuestra que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ no es un estadístico suficiente para θ. Calcula un estadístico suficiente minimal.

d) Calcula el EMV de θ y estudia sus propiedades.

e) Calcula el estimador de θ por el método de los momentos.

f) Calcula un intervalo de confianza para θ con coeficiente de confianza 0,95 usando los métodos de la función pivote y *bootstrap* paramétrico y no paramétrico, percentil y básico.

8. Sea (X_1, X_2) una muestra aleatoria simple de una distribución uniforme discreta sobre $\{1, \ldots, N\}$, siendo N el parámetro de la familia de distribuciones. Calcular las probabilidades condicionadas en el espacio muestral dado $X_1 + X_2 = 4$ y deducir que $X_1 + X_2$ no es suficiente para N.

9. Sea X una variable aleatoria con función de densidad $f_\theta(x) = e^{\theta - x} \cdot I(x > \theta)$ de la que se extrae una muestra aleatoria simple de tamaño n. Resuelve los siguientes apartados:

a) Calcula un estadístico suficiente para θ.

b) Calcula los estimadores de θ usando el método de los momentos y el de máxima verosimilitud.

c) Calcula un intervalo de confianza para θ con coeficiente de confianza 0,99.

10. Sea $(X_1, ..., X_4)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria $N(\mu, 2)$. Sean $T_1 = \sum_{i=1}^{4} X_i$ y $T_2 = (X_1 + X_2, X_3 + X_4)$. Comprobar si T_1 y T_2 son suficientes y calcular la distribución de $T_1 \mid T_2$.

11. Sea $(X_1, ..., X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad $f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2} \cdot I(0 < x < \theta)$. Resuelve los siguientes apartados considerando la realización muestral `c(4.6, 4.4, 1.8, 3, 4, 2.7, 1.7, 4.3, 3.9, 2.2)`.

a) Determina un estadístico suficiente y minimal para θ.

b) Calcula el estimador máximo-verosímil y el de los momentos. Comprueba si son insesgados.

c) Calcula un intervalo de confianza con coeficiente de confianza $1-\alpha$ por el método pivotal.

d) Ídem *bootstrap* y compara su longitud con el intervalo del apartado anterior.

12. Comprobar que las siguientes distribuciones pertenecen a la familia exponencial y determinar un estadístico minimal suficiente:

a) $\beta(p, q)$

b) $f_\theta(x) = \dfrac{x}{\theta^2} e^{-x^2/2\theta^2} I(x > 0)$