Ejercicio resuelto

Inferencia

28 de noviembre de 2023

Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo, en meses, entre interrupciones consecutivas de suministro ocurridas en cierta instalación eléctrica. Se supone que X sigue una distribución con densidad

```
f = function (x, mu) mu^(-1) * exp(-x/mu) * (x>0)
```

y que las interrupciones son independientes entre sí. Para estimar la distribución de X se tomó una muestra aleatoria simple cuyos resultados fueron los siguientes:

```
X = c(3.35, 1.30, 1.23, 2.13, 7.70, 11.61, 8.02, 1.44, 3.26,
 2.06, 6.06, 0.42, 5.58, 1.40, 6.26, 0.48, 1.46, 7.33, 7.55,
 1.37, 5.41, 0.23, 3.96, 0.86, 0.85, 1.76, 1.3, 18.36, 2.76,
 4.22)
```

1. Calcula el estimador máximo-verosímil de μ y el valor de la estimación para la muestra obtenida.

   densidad $f = e^{-x/\mu}/\mu \quad \Rightarrow \quad$ verosimiltud $L = e^{-\sum x_i/\mu}/\mu^n \quad \Rightarrow$ $\ln L = -\sum x_i/\mu - n \ln \mu \quad \Rightarrow \quad \partial \ln L/\partial \mu = \sum x_i/\mu^2 - n/\mu \quad \Rightarrow$ $\{ \quad 0 = \partial \ln L/\partial \mu \quad \Rightarrow \quad \hat{\mu}_{\text{MV}} = \sum x_i/n = \bar{x} \quad \}$

   o bien, sabiendo que X es exponencial$(1/\mu)$ y que $\hat{\lambda}_{\text{MV}} = 1/\bar{x}$, por la propiedad de invariancia funcional del EMV, $\hat{\mu}_{\text{MV}} = 1/\hat{\lambda}_{\text{MV}} = \bar{x}$

   ```
   mean(X) # estimación
   
   ## [1] 3.990667
   ```

2. Halla la esperanza y la varianza del estimador máximo-verosímil de μ.

   X_i exponencial$(1/\mu)$, independientes $\Rightarrow$ $\sum X_i$ gamma$(n, 1/\mu)$ $\Rightarrow$ $\hat{\mu}_{\mathrm{MV}}$ gamma$(n, n/\mu)$ $\Rightarrow$ esperanza $= n/(n/\mu) = \mu$, varianza $= n/(n/\mu)^2 = \mu^2/n$

3. Obtén un intervalo de confianza con coeficiente $1 - \alpha = 0{,}95$ para la media y la mediana de X.

```
(n = length(X))

## [1] 30

alfa = 1 - 0.95
(a = qgamma(c(alfa/2, 1-alfa/2), n, n))

## [1] 0.6746958 1.3882946

(muMV = mean(X))

## [1] 3.990667
```

media de $X = \mu$; $\hat{\mu}_{\mathrm{MV}}$ gamma$(n, n/\mu)$ $\Rightarrow$ $\hat{\mu}_{\mathrm{MV}}/\mu$ gamma(n, n) $\Rightarrow$ $0{,}95 = \Pr(0{,}6746958 < \hat{\mu}_{\mathrm{MV}}/\mu < 1{,}3882946)$ $\Rightarrow$ intervalo de confianza para la media $= [\hat{\mu}_{\mathrm{MV}}/1{,}3882946; \hat{\mu}_{\mathrm{MV}}/0{,}6746958] = [2{,}87451; 5{,}9147643]$

mediana de $X = m$ $\Rightarrow$ $1/2 = F(m) = 1 - e^{-m/\mu}$ $\Rightarrow$ $\ln(1/2) = -\ln 2 = -m/\mu$ $\Rightarrow$ $\hat{m}_{\mathrm{MV}} = \ln 2 \cdot \hat{\mu}_{\mathrm{MV}}$ por equivariancia $\Rightarrow$ intervalo de confianza para $m = \ln 2 \cdot$ intervalo de confianza para μ $= [1{,}9924585; 4{,}0998022]$

intervalo para μ mediante *bootstrap* :

```
B = 10000
## bootstrap percentil
distri = replicate (B,
{
```

```r
    Xb = sample(X,,TRUE)
    mean(Xb)
})
quantile (distri, c(alfa/2, 1-alfa/2))

##     2.5%    97.5%
## 2.731650 5.519042

## bootstrap básico
distri = replicate (B,
{
    Xb = sample(X,,TRUE)
    mean(Xb) - muMV
})
muMV - quantile (distri, c(1-alfa/2, alfa/2))

##    97.5%     2.5%
## 2.505567 5.270692
```

4. Calcula la estimación máximo-verosímil de μ, suponiendo que los datos de la muestra estuvieran agrupados en las siguientes clases:

Intervalo	$[0; 1)$	$[1; 1{,}5)$	$[1{,}5; 3)$	$[3; 4{,}5)$	$[4{,}5; 7{,}5)$	$\geq 7{,}5$
Frecuencia	5	7	4	4	5	5

```r
corte = c(0, 1, 1.5, 3, 4.5, 7.5, Inf)
frecu = c(5, 7, 4, 4, 5, 5)
L = function (mu) prod (diff (pexp (corte, 1/mu)) ^ frecu)
lnL = function (mu)
    sum (log (diff (pexp(corte, 1/mu))) * frecu)
optimize (  L, c(0, 100), maximum=TRUE) $ maximum

## [1] 4.053007

optimize (lnL, c(0, 100), maximum=TRUE) $ maximum

## [1] 4.053015
```

a