CONTRASTES DE HIPÓTESIS

EJEMPLOS

14 de febrero de 2022

Enunciado

Una empresa envasa patatitas en bolsas de 40 g.
Su procedimiento de control de calidad estipula que la cantidad media envasada por bolsa ha de ser exactamente 40 g, y que el proceso se considera fuera de control si se producen desvíos tanto por arriba (por la pérdida económica) como por abajo (por evitar acusaciones de fraude).
El protocolo de control consiste en la supervisión periódica de muestras de 10 bolsas.

1. Constrúyase una región crítica a nivel $\alpha = 0'05$ para el contraste $H_0 \equiv$ bajo control, $H_1 \equiv$ fuera de control.
2. Aplíquese el contraste a la muestra 38'5 - 39'2 - 39'8 - 38'3 - 39'7 - 39'5 - 39'6 - 40'6 - 38'3 - 40'8.

Supóngase que la cantidad envasada por bolsa sigue una distribución gausiana.

Resolución

Población:

$$X = \text{“cantidad en g envasada en cada bolsa”} \equiv N(\mu, \sigma)$$

Hipótesis:

$$H_0 \equiv \mu = 40 \qquad H_1 \equiv \mu \neq 40$$

Estadístico del contraste:

$$X \overset{H_0}{\equiv} N(40, \sigma)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{X} \overset{H_0}{\equiv} N\left(40, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ \frac{(n-1)\hat{S}_X^2}{\sigma^2} \equiv \chi^2_{n-1} \end{array}\right\} \text{independientes} \implies T = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}}} \equiv t_{n-1}$$

Resolución

Región crítica:

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid T < c_1\} \cup \{\vec{x} \mid T > c_2\}$$

$$P(T < c_1) = P(T > c_2) = \frac{\alpha}{2} \implies -c_1 = c_2 = F^{-1}_{t_{n-1}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

En R:

```
> (c2 <- qt (1-alfa/2, n-1))
[1] 2.262157
```

Resolución

Para la muestra obtenida:

```
> X
 [1] 38.5 39.2 39.8 38.3 39.7 39.5 39.6 40.6 38.3 40.8
> mean(X); sd(X)
[1] 39.43
[1] 0.8794569
> (T <- (mean(X) - mu0) / sd(X) * sqrt(n))
[1] -2.049558
> T < -c2 | T > c2 # ¿se rechaza H0?
[1] FALSE
```

Enunciado

Una empresa envasa patatitas en bolsas de 40 g.
Su procedimiento de control de calidad estipula que la cantidad media envasada por bolsa ha de ser al menos 40 g.
El protocolo de control consiste en la supervisión periódica de muestras de 10 bolsas.

1. Constrúyase una región crítica a nivel $\alpha = 0'05$ para el contraste $H_0 \equiv$ bajo control, $H_1 \equiv$ fuera de control.
2. Aplíquese el contraste a la muestra 38'5 - 39'2 - 39'8 - 38'3 - 39'7 - 39'5 - 39'6 - 40'6 - 38'3 - 40'8.

Supóngase que la cantidad envasada por bolsa sigue una distribución gausiana.

Resolución

Población:

$$X = \text{“cantidad en g envasada en cada bolsa”} \equiv N(\mu, \sigma)$$

Hipótesis:

$$H_0 \equiv \mu \geq 40 \qquad H_1 \equiv \mu < 40$$

Estadístico del contraste:

$$T = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}}} \equiv t_{n-1}$$

Resolución

Región crítica:

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid T < c\}$$

$$P(T < c) = \alpha \implies c = F_{t_{n-1}}^{-1}(\alpha)$$

```
> (c <- qt (alfa, n-1))
[1] -1.833113
> (T <- (mean(X) - mu0) / sd(X) * sqrt(n))
[1] -2.049558
> T < c # ¿se rechaza H0?
[1] TRUE
```

Enunciado

Una empresa envasa patatitas en bolsas de 40 g.
Su procedimiento de control de calidad estipula que la cantidad media envasada por bolsa ha de ser al menos 40 g.
El protocolo de control consiste en la supervisión periódica de muestras de 10 bolsas.

1. Constrúyase una región crítica a nivel $\alpha = 0'05$ para el contraste $H_0 \equiv$ bajo control, $H_1 \equiv$ fuera de control.
2. Aplíquese el contraste a cierta muestra tal que $\bar{x} = 40'2$.

Supóngase que la cantidad envasada por bolsa sigue una distribución gausiana.

Resolución

Población:

$$X = \text{“cantidad en g envasada en cada bolsa”} \equiv N(\mu, \sigma)$$

Hipótesis:

$$H_0 \equiv \mu \geq 40 \qquad H_1 \equiv \mu < 40$$

Estadístico del contraste:

$$T = \frac{\bar{X} - 40}{\frac{\hat{S}_X}{\sqrt{n}}} \equiv t_{n-1}$$

Resolución

Región crítica:

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid T < c\}$$

$$P(T < c) = \alpha \implies c = F_{t_{n-1}}^{-1}(\alpha)$$

```
> (c <- qt (alfa, n-1))
[1] -1.833113
```

Sabemos que $c < 0$ y que $T > 0$, luego $\vec{x} \notin$ R.C.

Enunciado

Una empresa fabrica sensores, que se clasifican en válidos o defectuosos.
Su procedimiento de control de calidad estipula que la proporción poblacional de defectuosos ha de ser a lo sumo 0'03.
El protocolo de control consiste en la supervisión periódica de muestras de 50 sensores.

1. Constrúyase una región crítica a nivel $\alpha = 0'05$ para el contraste $H_0 \equiv$ bajo control, $H_1 \equiv$ fuera de control.
2. Aplíquese el contraste a la muestra 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0.
3. Calcúlese el tamaño del contraste.

Resolución

Población:

$$X = \text{“0 si válido, 1 si defectuoso”} \equiv B(1, p)$$

Hipótesis:

$$H_0 \equiv p \leq 0'03 \qquad H_1 \equiv p > 0'03$$

Estadístico del contraste:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{H_0}{\equiv} B(n, 0'03)$$

Región crítica:

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid T > c\}$$

Resolución

- Región crítica: R.C. $= \{\vec{x} \mid T > c\}$

```
> (c <- qbinom(1-alfa, n, p0))
[1] 4
```

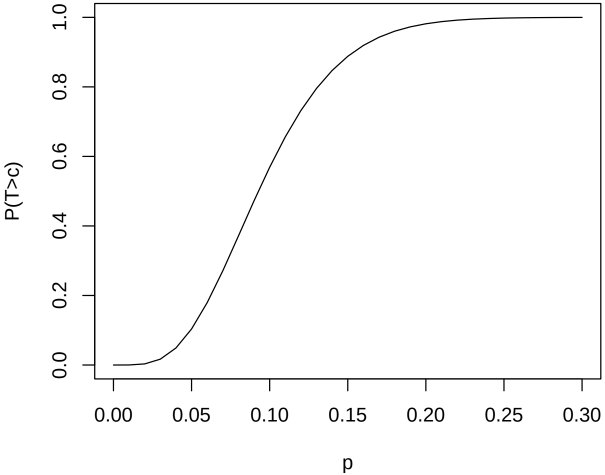
- $P(T > 4) =$ tamaño

```
> 1 - pbinom(c, n, p0)
[1] 0.01681065
```

- $P(T > 3) = P(T \geq 4)$ excede el nivel de significación

```
> 1 - pbinom(c-1, n, p0)
[1] 0.06275993
```

Potencia



Potencia

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pot}(p) &= 1 - \Pr[T \leq c \mid p] \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{c} \Pr[B(n,p) = k] = \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

Potencia

$$\frac{\partial \operatorname{Pot}(p)}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\left(1 - \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}\right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(kp^{k-1}(1-p)^{n-k} - p^k (n-k)(1-p)^{n-k-1}\right)$$

$$= -\sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} kp^{k-1}(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (n-k)(1-p)^{n-k-1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} kp^{k-1}(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (n-k)(1-p)^{n-k-1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{c} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1}(1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

$$= -\sum_{\kappa=0}^{c-1} \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa-1)!} p^{\kappa}(1-p)^{n-\kappa-1} + \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1}$$

Potencia

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \operatorname{Pot}(p)}{\partial p} &= -\sum_{\kappa=0}^{c-1} \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa-1)!} p^{\kappa}(1-p)^{n-\kappa-1} \\
&+ \sum_{k=0}^{c} \frac{n!}{k!(n-k-1)!} p^{k}(1-p)^{n-k-1} \\
&= \frac{n!}{c!(n-c-1)!} p^{c}(1-p)^{n-c-1} \\
&> 0 \\
&\Longrightarrow \operatorname{Pot}(p) \text{ creciente}
\end{aligned}
$$

Resolución

A menudo se usa la versión asintótica:

$$\hat{p} = \bar{X} \equiv N\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}\right)$$

$$\text{R.C.} = \{\vec{x} \mid \hat{p} > c\}$$

```
> (c <- qnorm(1-alfa, p0, sqrt(p0*(1-p0)/n)))
[1] 0.06968156
> c * n
[1] 3.484078
```