Ejercicios

7 de febrero de 2025

1. El coste de fabricación de equipos electrónicos de una empresa se ajusta a una distribución *Normal(5000, 30)*. Su departamento de I+D ha desarrollado un nuevo método de fabricación con el que han producido n equipos y quiere determinar si el coste medio sigue siendo el mismo o se ha reducido.

   Sabiendo que la desviación típica con el nuevo método no cambia, resuelve las siguientes cuestiones.

   a) Formula las hipótesis nula y alternativa

   b) Define una región crítica con nivel de significación $\alpha = 0\text{'}05$.

   c) Estudia el efecto de n sobre la potencia del test.

   d) Estudia el efecto de σ sobre la potencia del test, para n fijo.

   e) Analiza cómo cambiaría el problema si las hipótesis a contrastar fueran $H_0 : \mu \geq 5000$ frente a $H_1 : \mu < 5000$

   f) Contrasta las hipótesis $H_0 : \mu \geq 5000$ frente a $H_1 : \mu < 5000$ si la desviación típica fuera desconocida.

2. Dada la variable aleatoria $X \equiv N(\mu, \sigma)$, con σ conocido, se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \mu \leq \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > \mu_0$ al nivel de significación α y de manera que la potencia del contraste sea β para $\mu = \mu_0 + d$ con $d > 0$. Resuelve los siguientes apartados.

   a) ¿Cuál será el mínimo tamaño de muestra necesario?

   b) ¿Cómo calcularías n si la desviación típica σ fuera desconocida?

3. En una empresa se sabe que el porcentaje de piezas que presentan algún defecto es mayor o igual al 25 %. Para intentar mejorar esta situación el departamento de I+D+i ha propuesto una serie de cambios que se han aplicado en la fabricación de 36 piezas de las que sólo 3 estaban defectuosas. Resuelve los siguientes apartados.

   a) Contrasta al nivel de significación 0'01 si la probabilidad de fallo se reduce realmente con el nuevo método de fabricación.

b) Estima el mínimo tamaño de muestra necesario para garantizar el rechazo del método tradicional, con una potencia de 0'80, si la P(fallo) se hubiera reducido a la mitad.

4. Sea $(x_1, ..., x_n)$ una muestra aleatoria simple de tamaño 9 de una variable X con distribución $N(\mu, 1)$, con la que se desea contrastar las hipótesis $H_0 : \mu = 3\text{'}5$ frente a $H_1 : \mu = 5$. Resuelve las siguientes cuestiones:

   a) Encontrar un test al nivel de significación 0'05.

   b) Calcular la función potencia del test.

   c) ¿Qué ocurre con la potencia del test con un tamaño de muestra de 36?

   d) Si la hipótesis alternativa fuese $H_1 : \mu = 9$, ¿qué cambia en el contraste?

5. La proporción de piezas defectuosas en una cadena de producción es usualmente 0'1. Para contrastar esta hipótesis se toma una muestra de tamaño 10 y se proponen dos métodos de decisión:

   - Rechazar esa hipótesis si hay alguna pieza defectuosa.
   - Rechazar esa hipótesis si hay más de dos piezas defectuosas.

   Resuelve las siguientes preguntas:

   a) ¿Definen estos métodos tests al nivel de significación 0'1?

   b) Construye una región crítica al nivel de significación 0'05.

6. Un mayorista afirma que, entre los productos que fabrica, el 96 % no sufre avería el primer año de uso. Se compra un lote de 125 aparatos con el compromiso de que si durante el primer año de uso se averían más de 6 se rechaza la afirmación del mayorista, se devuelve el lote y se recibe una indemnización.

   a) Plantea el contraste de hipótesis asociado a este problema, la región crítica y la de aceptación.

   b) Determina el nivel de significación del contraste.

7. Sea X una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1} & \text{si } x \in [0,1] \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   para la que se recoge la siguiente muestra aleatoria simple:

```
c(0.355, 0.921, 0.404, 0.448, 0.196, 0.637, 0.968, 0.647, 0.862,
0.462, 0.778, 0.312, 0.912, 0.57, 0.484, 0.506, 0.804, 0.643,
0.213, 0.603, 0.128, 0.596, 0.958, 0.888, 0.772, 0.243, 0.652,
0.662, 0.999, 0.856)
```

a) Buscar una región crítica, basada en el estimador máximo-verosímil, para contrastar $H_0 : \theta = 3$ frente a $H_1 : \theta \neq 3$ con la información de una muestra de 30 observaciones y nivel de significación 0'05.

b) Calcular y representar la función potencia.

c) Hallar el tamaño de la muestra necesario para tener una potencia de 0'90 con $\theta = 4$.

8. Se dispone de los siguientes valores de la variable X = *crecimiento diario predestete en kg/día* para una muestra de bisontes de capa parda:

```
c(1.358, 1.097, 0.945, 1.252, 1.022, 1.002, 1.098, 1.095, 1.342,
1.174, 1.013, 1.315, 1.446, 1.29, 1.535)
```

Se quiere estudiar la misma variable en bisontes de capa rubia (BCR).

a) Suponiendo que tiene la misma varianza que X y que vale $\sigma^2 = 0'04$, ¿cuántos BCR habría que medir para poder detectar con una potencia del 90 % una diferencia de medias de 0'1 kg a nivel de significación 0'05?

b) Suponiendo que las varianzas son desconocidas y que se han recogido la siguiente muestra para los BCR, contrasta si hay evidencia de que las medias poblacionales son distintas:

```
c(1.488, 1.732, 1.849, 1.353, 1.489, 1.535, 1.485, 1.421, 1.153,
1.209, 1.474, 1.166, 1.369, 1.412, 0.984, 1.217, 1.495, 1.549,
1.354, 1.354, 1.271, 1.58, 1.341, 1.62, 1.143)
```

9. Se han obtenido las siguientes calificaciones en una prueba de matemáticas realizada a varios alumnos de primer y segundo cursos de bachillerato:

```
c(6.9, 6.1, 7.3, 7, 7.5, 6.9, 6.5, 6.8, 6.3, 6.6, 7.2, 7, 7.3,
6.9, 7.1, 6.7, 6.9, 6.9, 6.5, 6.9) # primer curso
c(6.5, 8.1, 6.3, 6.1, 6.6, 4.9, 7.1, 4.5, 6.9, 6.1, 7.8, 5.7,
7.4, 6.6, 6.8, 6.4, 6.1, 6.4, 5.4, 7.2) # segundo curso
```

Suponiendo que las calificaciones en cada curso siguen sendas distribuciones gausianas,

a) calcula un intervalo al 90 % de confianza de la diferencia entre sus esperanzas;

b) comprueba si puede considerarse que sus esperanzas son iguales a nivel de significación $\alpha = 0'05$.

10. En una empresa industrial donde se realiza un control de calidad por atributos, se muestrean doscientas piezas y se comprueba que cinco de ellas han salido defectuosas. Se quiere realizar una prueba para comprobar si un nuevo sistema de producción reduce el porcentaje poblacional de piezas defectuosas.

a) ¿Cuántas piezas producidas bajo el nuevo sistema se deberían muestrear para poder detectar una reducción del porcentaje de defectuosos de un punto porcentual (p.ej. del 10 % al 9 %, o del 2 % al 1 %) a nivel de significación 10 % y con potencia de 70 %?

b) Justifica una conclusión a partir de una muestra de ciento cincuenta piezas fabricadas bajo el nuevo sistema, entre las que no se ha observado ninguna pieza defectuosa.