Inferencia Estadística

Tema 3: Contrastes de hipótesis

M.T. López, N. Corral, C. Carleos

Departamento de Estadística — Universidad de Oviedo

11 de diciembre de 2020

Contrastes de hipótesis: objetivo

Determinar de acuerdo con la información muestral recogida si determinada hipótesis acerca de alguna característica de la población debe ser rechazada o no. Para ello analizará si existen indicios suficientes para cuestionar su validez.

Contrastes de hipótesis: objetivo

Determinar de acuerdo con la información muestral recogida si determinada hipótesis acerca de alguna característica de la población debe ser rechazada o no. Para ello analizará si existen indicios suficientes para cuestionar su validez.

Definición: HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

Afirmación sobre el comportamiento de una variable aleatoria, generalmente referida a alguno de sus parámetros, como una probabilidad, su media, o su varianza; también puede estar referida a alguna propiedad de la población como su distribución (normalidad) o a la independencia entre distintas características.

Contrastes de hipótesis: objetivo

Determinar de acuerdo con la información muestral recogida si determinada hipótesis acerca de alguna característica de la población debe ser rechazada o no. Para ello analizará si existen indicios suficientes para cuestionar su validez.

Definición: HIPÓTESIS ESTADÍSTICA

Afirmación sobre el comportamiento de una variable aleatoria, generalmente referida a alguno de sus parámetros, como una probabilidad, su media, o su varianza; también puede estar referida a alguna propiedad de la población como su distribución (normalidad) o a la independencia entre distintas características.

Ejemplos

- La proporción de afectados por la gripe este otoño es 0,25.
- Tiempo dedicado a estudiar es independiente del dedicado a ver TV.
- Un reactivo emite partículas según una distribución de Poisson.

Otras definiciones

Hipótesis paramétrica

Si hace referencia a algún parámetro de la distribución.

Hipótesis simple

Si especifica totalmente la distribución; en otro caso se dice que la hipótesis es *compuesta*.

Ejemplo

Sea $X \equiv B(p)$

$$\begin{array}{ll} H \equiv p = 0{,}5 & \text{es una hipótesis paramétrica simple} \\ H \equiv p \neq 0{,}25 & \text{es hipótesis paramétrica compuesta} \end{array}$$

Otras definiciones

Hipótesis paramétrica

Si hace referencia a algún parámetro de la distribución.

Hipótesis simple

Si especifica totalmente la distribución; en otro caso se dice que la hipótesis es *compuesta*.

Ejemplo

Sea $X \equiv N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida.

$H \equiv \mu = 3$	es una hipótesis paramétrica compuesta
$H \equiv \mu = 7, \sigma = 2$	es un hipótesis paramétrica simple

Otras definiciones

Hipótesis nula

Se representa por H_0 a una hipótesis considerada como referencia. En caso de no tener información muestral, no la rechazaríamos.

Hipótesis alternativa

Se representa por H_1 a la hipótesis contraria a H_0.

Ejemplo

Un fabricante desea saber si un nuevo procedimiento de producción presenta más estabilidad en el peso del producto que fabrica que el utilizado actualmente, con $\sigma^2 = 0{,}2$. Para ello formulará las hipótesis:

$$\begin{aligned} H_0 &\equiv \text{la estabilidad del peso no mejora} \\ H_1 &\equiv \text{la estabilidad del peso mejora} \end{aligned}$$

o, en contexto estadístico: $H_0 \equiv \sigma^2 = 0{,}2$ frente a $H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$.

Asimetría entre H_0 y H_1

Los contrastes estadísticos no eligen la hipótesis más verosímil a la vista de los datos de la muestra, sino que establecen si existen evidencias suficientes para rechazar lo que afirma H_0.

H_0

- Es la hipótesis de referencia.
- Se rechaza sólo si se observa una gran evidencia en contra.
- Nunca se concluye que sea cierta, sino que no hay evidencias para rechazarla.

H_1

- Es la contraria a H_0.
- No es *aceptada* sin una gran evidencia en contra de H_0.

Definiciones

Contraste de hipótesis

Partición medible del espacio muestral en dos regiones: *región crítica* y *región de aceptación*.

Región crítica R.C.

Conjunto de resultados muestrales en los que se rechaza H_0.

Región alternativa o región de aceptación R.A.

Conjunto de resultados muestrales en los que no se rechaza H_0.

Función test

Función indicador de la región crítica, $\varphi : \mathcal{X}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, de forma que

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \vec{x} \in \text{R.C.} \\ 0 & \text{si } \vec{x} \in \text{R.A.} \end{cases}$$

Cuando se realiza un contraste se presentan cuatro alternativas:

	H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazar H_0	error I	acierto
No rechazar H_0	acierto	error II

Ejemplo

Sea $X \equiv N(\mu, \sigma)$ de la que se extrae una m.a.s. para realizar el contraste
$H_0 \equiv \sigma^2 = 0{,}2 \quad H_1 \equiv \sigma^2 = 0{,}1$.
Consideramos R.C. $= \{\vec{x} \mid \hat{S}^2 < 0{,}15\}$ y R.A. $= \{\vec{x} \mid \hat{S}^2 \geq 0{,}15\}$.

- Bajo H_0
  - Si $\hat{S}^2 = 0{,}16$, acierto
  - Si $\hat{S}^2 = 0{,}13$, error de tipo I.
- Bajo H_1
  - Si $\hat{S}^2 = 0{,}13$, acierto
  - Si $\hat{S}^2 = 0{,}16$, error de tipo II.

Definiciones

Cuando se realiza un contraste se presentan cuatro alternativas:

	H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazar H_0	error I	acierto
No rechazar H_0	acierto	error II

Sea el contraste $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0$, $H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$.

Probabilidad de error de tipo I

Probabilidad de rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_0$: $\quad P\,(\text{R.C.} \mid \theta)$

Definiciones

Cuando se realiza un contraste se presentan cuatro alternativas:

	H_0 cierta	H_0 falsa
Rechazar H_0	error I	acierto
No rechazar H_0	acierto	error II

Sea el contraste $H_0 \equiv \theta \in \Theta_0$, $H_1 \equiv \theta \in \Theta_1$.

Probabilidad de error de tipo I

Probabilidad de rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_0$: $\quad P\,(\text{R.C.} \mid \theta)$

Probabilidad de error de tipo II

Probabilidad de no rechazar H_0 para cierto $\theta \in \Theta_1$: $\quad P\,(\text{R.A.} \mid \theta)$

Ejemplo

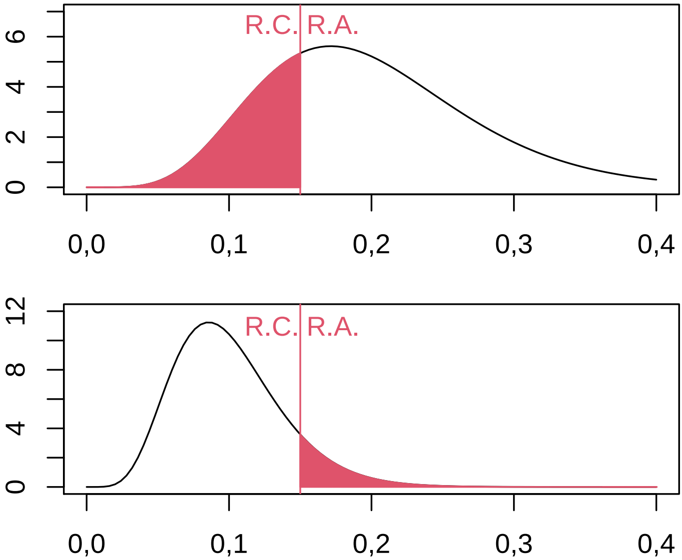
- Supóngase $X \equiv N(\mu, \sigma)$ y una m.a.s. con $n = 15$.
- Sea el contraste $H_0 \equiv \sigma^2 = 0{,}2 \quad H_1 \equiv \sigma^2 = 0{,}1$.
- Consideramos R.C. $= \{\vec{x} \mid \hat{S}^2 < 0{,}15\}$ y R.A. $= \{\vec{x} \mid \hat{S}^2 \geq 0{,}15\}$.
- Si $\sigma^2 = 0{,}2$,

$$\begin{aligned} P\,(\text{error I}) &= P\,(\hat{S}^2 < 0{,}15) = P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{0{,}2} < \frac{14 \cdot 0{,}15}{0{,}2}\right) \\ &= P\left(\chi^2_{14} < \frac{14 \cdot 0{,}15}{0{,}2}\right) \approx 0{,}275 \end{aligned}$$

- Si $\sigma^2 = 0{,}1$,

$$P\,(\text{error II}) = P\,(\hat{S}^2 < 0{,}15) = P\left(\chi^2_{14} \geq \frac{14 \cdot 0{,}15}{0{,}1}\right) \approx 0{,}102$$

Ejemplo: densidades de $\hat{S}^2$ bajo H_0 y H_1



Procedimiento habitual para buscar la región crítica

1. Fijar el *nivel de significación*

Se trata de una cota para la probabilidad de error de tipo I.
Se representa por α.
Para un contraste $H_0 : \theta \in \Theta_0 \qquad H_1 : \theta \in \Theta_1$ se tiene pues

$$\forall\, \theta \in \Theta_0 \qquad P\,(\text{error I}) = P\,(\text{R.C.} \mid \theta) \leq \alpha$$

2. Minimizar la probabilidad de error II

Entre los contrastes que cumplan el nivel de significación se busca aquel contraste que hace mínima la probabilidad de error de tipo II.

Procedimiento habitual para buscar la región crítica

Consecuencias

- Este tipo de criterio es muy conservador respecto a H_0, ya que trata de garantizar que la probabilidad de rechazar H_0, cuando es cierta, sea muy pequeña.
- Habitualmente α es un valor pequeño fijado por el investigador, como 0,05 ó 0,01.
- α es cota superior para la probabilidad de error I, luego está asociado a la región crítica y a la hipótesis nula.
- Se dice que un resultado muestral es *significativo* al nivel α si está en la región crítica, y por tanto lleva al rechazo de la hipótesis nula.

Metodología

1. Formular las hipótesis del estudio y traducirlas a la terminología estadística.
2. Fijar el nivel de significación o probabilidad de error de tipo I, α.
3. Construir la región de rechazo de la hipótesis nula, o región crítica, que estará formada por un subconjunto de los posibles valores muestrales.
4. Seleccionar la muestra.
5. Tomar la decisión de rechazar la H_0 si el resultado muestral disponible está en la región crítica.

Metodología

Construcción de un buena R.C.

- En la R.C. estarán valores muestrales mucho menos verosímiles bajo H_0 que bajo H_1.
- Se suele expresar en función de un estadístico, llamado *estadístico del contraste*, que mide las discrepancias de las distintas muestras que forman la R.C. con la hipótesis nula.
- La distribución bajo H_0 del estadístico del contraste ha de ser conocida para garantizar el nivel de significación.

Definiciones

Contraste unilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por una cola de la distribución del estadístico de contraste.

Definiciones

Contraste unilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por una cola de la distribución del estadístico de contraste.

Contraste bilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por las dos colas de la distribución del estadístico de contraste.

Definiciones

Contraste unilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por una cola de la distribución del estadístico de contraste.

Contraste bilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por las dos colas de la distribución del estadístico de contraste.

Función de potencia

Es la función $\text{Pot}(\theta)$ que devuelve la probabilidad de rechazar H_0 cuando el parámetro es θ, es decir, $\text{Pot}(\theta) = P\,(\text{R.C.} \mid \theta)$.

Definiciones

Contraste unilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por una cola de la distribución del estadístico de contraste.

Contraste bilateral

Contraste de hipótesis cuya región de rechazo está formada por las dos colas de la distribución del estadístico de contraste.

Función de potencia

Es la función $\text{Pot}(\theta)$ que devuelve la probabilidad de rechazar H_0 cuando el parámetro es θ, es decir, $\text{Pot}(\theta) = P\,(\text{R.C.} \mid \theta)$.

Tamaño de un test

Es el valor: $\sup_{\theta\in\Theta_0} \text{Pot}(\theta)$.

Ejemplo

- X = peso de piezas $\equiv N(\mu, \sigma)$
- contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2$, $H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$
- nivel de significación $\alpha = 0{,}05$
- tamaño muestral $n = 15$
- estimador de σ^2: $\hat{S}^2$
- región crítica intuitiva:

$$\text{R.C.} = \left\{ (x_1, \cdots, x_{15}) \;\middle|\; \hat{S}^2 < c \right\}$$

Ejemplo (continuación)

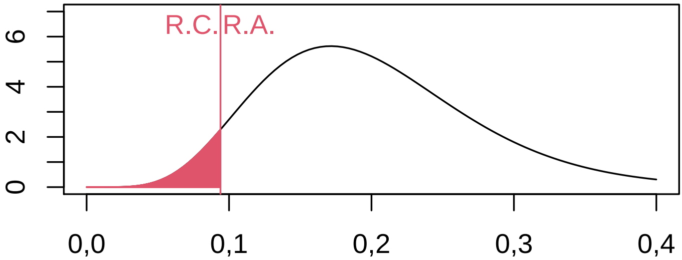
- cálculo de c:

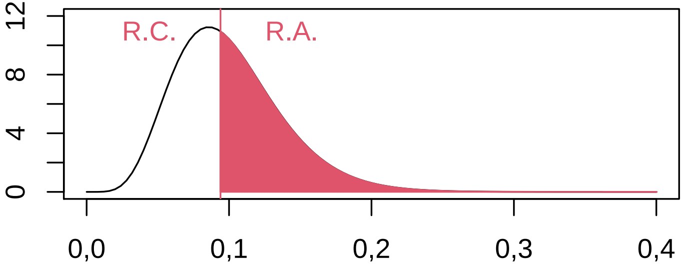
$$\begin{aligned} P\left(\text{R.C.} \mid H_0\right) &= P\left(\hat{S}^2 < c \mid H_0\right) \\ &= P\left(\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} < \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \;\middle|\; H_0\right) = \\ &= P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)c}{\sigma^2} \;\middle|\; \sigma^2 \geq 0{,}2\right) \\ &\leq P\left(\chi^2_{n-1} < \frac{(n-1)c}{0{,}2}\right) \end{aligned}$$

Tomando $F_{\chi^2_{n-1}}\left(\frac{(n-1)c}{0{,}2}\right) = \alpha$ entonces $c = \frac{0{,}2}{n-1} F^{-1}_{\chi^2_{n-1}}(\alpha)$.

En este caso, R.C. $= \left\{\vec{x} \;\middle|\; \hat{S}^2 < \frac{0{,}2}{14} F^{-1}_{\chi^2_{14}}(0{,}05)\right\} = \left\{\vec{x} \;\middle|\; \hat{S}^2 < 0{,}094\right\}$.

Ejemplo: densidades de $\hat{S}^2$ bajo H_0 y H_1





Ejemplo

contraste $H_0 \equiv \sigma^2 \geq 0{,}2,\ H_1 \equiv \sigma^2 < 0{,}2$

- Se trata de un contraste unilateral.
- $X \equiv N(\mu, \sigma),\ n = 15,\ \alpha = 0{,}05 \implies \text{R.C.} = \left\{ \vec{x} \;\middle|\; \hat{S}^2 < 0{,}094 \right\}$
- $\text{Pot}(\sigma^2) = P\left(\text{R.C.} \mid \sigma^2\right) = P\left(\hat{S}^2 < 0{,}094 \mid \sigma^2\right) = P\left(\chi^2_{14} < \frac{14 \cdot 0{,}094}{\sigma^2}\right)$