Análisis de correspondencias

18 de marzo de 2021

El objetivo del análisis de correspondencias es analizar la razón por la cual dos variables cualitativas no son independientes. Se utiliza habitualmente en tablas de contingencia de gran tamaño.

1. Notación

Supongamos que se dispone de una tabla de contingencia, donde la variable representada en las filas tiene n categorías y la que aparece en columnas, p.

$$
\begin{aligned}
k_{ij} &= \text{número de respuestas en la fila } i \text{ columna } j \\
k &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} k_{ij} = \text{número total de observaciones} \\
f_{ij} &= \frac{k_{ij}}{k} = \text{frecuencia relativa de la celda } i,j \\
f_{i\cdot} &= \sum_{j=1}^{p} f_{ij} = \text{frecuencia relativa de la fila } i \\
f_{\cdot j} &= \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = \text{frecuencia relativa de la columna } j
\end{aligned}
$$

2. Resumen

Perfil de las puntos fila

$$i = \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\right)_{j=1}^{p}$$

Distancia entre los puntos fila i, i'

$$d^2(i,i') = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)^2$$

Perfil de las puntos columna

$$i = \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} \right)_{i=1}^{n}$$

Distancia entre los puntos columna j, j'

$$d^2(j,j') = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_{i\cdot}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}\sqrt{f_{i\cdot}}} \right)^2$$

Puntuaciones en las componentes principales en el espacio R^n

- Valores originales

$$i = \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right)_{j=1}^{p}$$

- Valores originales centrados:

$$i = \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)_{j=1}^{p}$$

- Componentes principales en el eje α

$$\psi_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f \cdot j} \right) u_{\alpha j} = \sum_{j=1}^{p} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} u_{\alpha j}$$

Puntuaciones en las componentes principales en el espacio R^p

- Valores originales

$$j = \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} \right)_{i=1}^{n}$$

- Valores originales centrados:

$$j = \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}} \right)_{i=1}^{n}$$

- Componentes principales en el eje α

$$\varphi_{\alpha j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}} \right) v_{\alpha i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} v_{\alpha i}$$

Relaciones entre las componentes de los dos espacios:

- Puntos fila en el espacio de los puntos columna

$$\psi_{\alpha i} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_{j=1}^{p} \frac{f_{ij}}{f_{i.}} \varphi_{\alpha j}$$

- Puntos columna en el espacio de los puntos fila

$$\varphi_{\alpha j} = \frac{1}{\lambda_\alpha} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{.j}} \psi_{\alpha i}$$

Contribuciones absolutas y relativas:

absoluta Representa la parte de la variabilidad del eje α que se debe a cada punto

$$\mathrm{Ca}_\alpha(i) = \frac{f_{i\cdot}\psi_{\alpha i}^2}{\lambda_\alpha}$$

relativas Representa la aportación del eje α a la distancia del punto i respecto al centro de las puntuaciones

$$\mathrm{Cr}_i(\alpha) = \frac{\psi_{\alpha i}^2}{d^2(i,G)}$$

3. Nubes de puntos: el espacio $\mathrm{R^p}$

Cada punto fila se caracteriza mediante las frecuencias relativas de las p categorías condicionadas a la categoría fila i:

$$i \rightarrow \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\right)_{j=1}^{p} \qquad \text{perfil del punto } i$$

Si se verificase la hipótesis de independencia, se verificaría que $f_{ij} = f_{i\cdot} \times f_{\cdot j}$ y por lo tanto

$$\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\right)_{j=1}^{p} = \left(\frac{f_{i\cdot} \times f_{\cdot j}}{f_{i\cdot}}\right)_{j=1}^{p} = (f_{\cdot j})_{j=1}^{p}$$

es decir, los perfiles de los puntos fila serían idénticos. Por tanto, lo que interesa es analizar la variabilidad qu existe entre los puntos fila y determinar cuáles son más diferentes y en qué categoría ocurre.

Para ello se define una distancia entre los puntos fila:

$$d^2(i,i') = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}}\right)^2$$

4. Propiedades de la distancia

Si dos puntos fila i_1 e i_2 tienen idénticos perfiles, es decir, $\frac{f_{i_1 j}}{f_{i_1 \cdot}} = \frac{f_{i_2 j}}{f_{i_2 \cdot}}$, $j = 1, \ldots, p$, y se agrupan en una única categoría i_0, la distancia $d^2(j, j')$ queda invariante:

$$i_0 = i_1 + i_2 \equiv \begin{cases} f_{i_0 j} = f_{i_1 j} + f_{i_2 j} \\ f_{i_0 \cdot} = f_{i_1 \cdot} + f_{i_2 \cdot} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d^2(j, j') &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f_{i\cdot}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ &= \sum_{i \neq i_1, i_2} \frac{1}{f_{i\cdot}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{f_{i_1 \cdot}} \left(\frac{f_{i_1 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_1 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 + \frac{1}{f_{i_2 \cdot}} \left(\frac{f_{i_2 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_2 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \qquad \frac{1}{f_{i_1 \cdot}} \left(\frac{f_{i_1 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_1 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 &= \frac{f_{i_1 \cdot}^2}{f_{i_1 \cdot}} \left(\frac{f_{i_1 j}/f_{i_1 \cdot}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_1 j'}/f_{i_1 \cdot}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ &= f_{i_1 \cdot} \left(\frac{f_{i_0 j}/f_{i_0 \cdot}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}/f_{i_0 \cdot}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ &= \frac{f_{i_1 \cdot}}{f_{i_0 \cdot}^2} \left(\frac{f_{i_0 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ (2) \qquad \frac{1}{f_{i_2 \cdot}} \left(\frac{f_{i_2 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_2 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 &= \frac{f_{i_2 \cdot}}{f_{i_0 \cdot}^2} \left(\frac{f_{i_0 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &= \frac{f_{i_1 \cdot} + f_{i_2 \cdot}}{f_{i_0 \cdot}^2} \left(\frac{f_{i_0 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 = \frac{f_{i_0 \cdot}}{f_{i_0 \cdot}^2} \left(\frac{f_{i_0 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{f_{i_0 \cdot}} \left(\frac{f_{i_0 j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i_0 j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \end{aligned}$$

ya que $\frac{f_{i_1 j}}{f_{i_1 \cdot}} = \frac{f_{i_2 j}}{f_{i_2 \cdot}} = \frac{f_{i_0 j}}{f_{i_0 \cdot}}$.

5. Análisis de componentes principales

Dado que el objetivo es analizar la variabilidad entre los puntos, aplicaremos el análisis de componentes principales, caracterizando cada punto fila con el siguiente vector de valores:

$$i \to \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right)_{j=1}^{p}$$

ya que de esta manera la distancia entre dos puntos i, i' es una distancia euclídea:

$$d^2(i,i') = \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}} \right)^2 = \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right)^2$$

Las etapas del análisis son las siguientes:

a) Centrar las variables.

b) Calcular la matriz de varianzas-covarianzas.

c) Obtener los valores y vectores propios.

d) Calcular las componentes principales.

e) Interpretar su significado.

Desarrollo:

a) Centrar las variables, que se corresponden con las modalidades de respuesta.

$$E(j) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \times f_{i\cdot} = \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sum_{i=1}^{n} f_{ij} = \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} f_{\cdot j} = \sqrt{f_{\cdot j}}$$

Las puntuaciones centradas de los puntos filas son

$$i \to \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)_{j=1}^{p}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(j,j') &= \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j'}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{ij}x_{ij'} \end{aligned}$$

con $x_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}$.

La matriz de varianzas-covarianzas será $T = X^t \cdot X$. Sean $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p$ los vectores propios de T ordenados según los valores propios correspondientes, de mayor a menor.

Teorema 1 *La matriz $X^t \cdot X$ tiene un valor propio igual a cero, cuyo vector propio es $\vec{u}_p = \left(\sqrt{f_{\cdot j}}\right)_{j=1}^{p}$.*

Demostración

$$X^t X \vec{u}_p = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u}_p^t X^t X \vec{u}_p = 0, \text{ es decir, } X\vec{u}_p = \vec{0}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{\cdot j}} &= \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}} f_{\cdot j} \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{f_{i\cdot}}} \sum_{j=1}^{p} f_{ij} - \sqrt{f_{i\cdot}} \sum_{j=1}^{p} f_{\cdot j} \\
&= \frac{f_{i\cdot}}{\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}} = 0
\end{aligned}$$

Teorema 2 *Todo vector propio $\vec{u}_\alpha$ de $X^t X$, con $\alpha \neq p$ y valor propio λ_α, también es vector propio de ${X^*}^t X^*$ asociado a λ_α, siendo*

$$x^*_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}}$$

Demostración

$$X^t X \vec{u}_\alpha = {X^*}^t X^* \vec{u}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{u}_\alpha$$

$$\sum j' = 1^p \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij'} - f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}{\sqrt{f_{i\cdot}} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \right) u_{\alpha j'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \right) \left[\sum_{j'=1}^{p} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} - \sqrt{f_{i\cdot}} \sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j'}}\, u_{\alpha j'} \right]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{p} \left(\frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \right) \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{p} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{p} \frac{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{p} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} - \sqrt{f_{\cdot j}} \sum_{j'=1}^{p} \frac{u_{\alpha j'}}{\sqrt{f_{\cdot j'}}} \sum_{i=1}^{n} f_{ij'}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j'=1}^{p} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'}$$

porque

$$\sum_{j'=1}^{p} \frac{u_{\alpha j'}}{\sqrt{f_{\cdot j'}}} \sum_{i=1}^{n} f_{ij'} = \sum_{j'=1}^{p} \frac{u_{\alpha j'}}{\sqrt{f_{\cdot j'}}} f_{\cdot j'} = \sum_{j'=1}^{p} u_{\alpha j'} \sqrt{f_{\cdot j'}} = 0$$

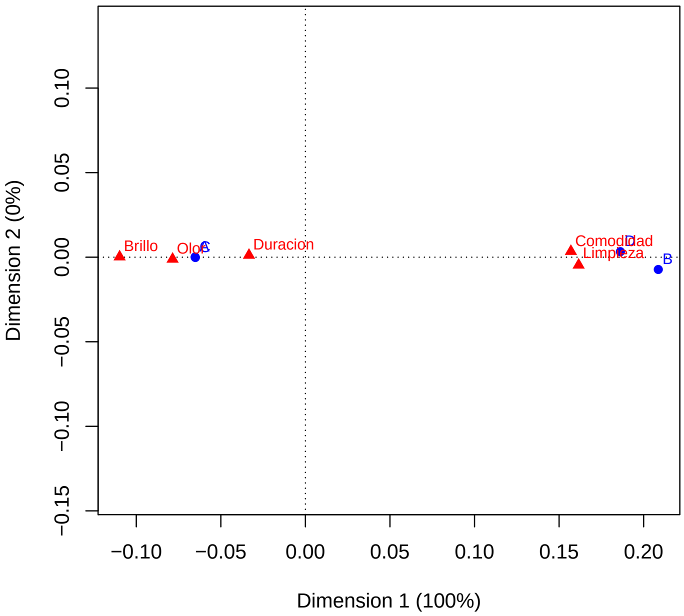
6. R

6.1. Estudiar la relación que existe entre el producto y las cualidades que les asignan los clientes

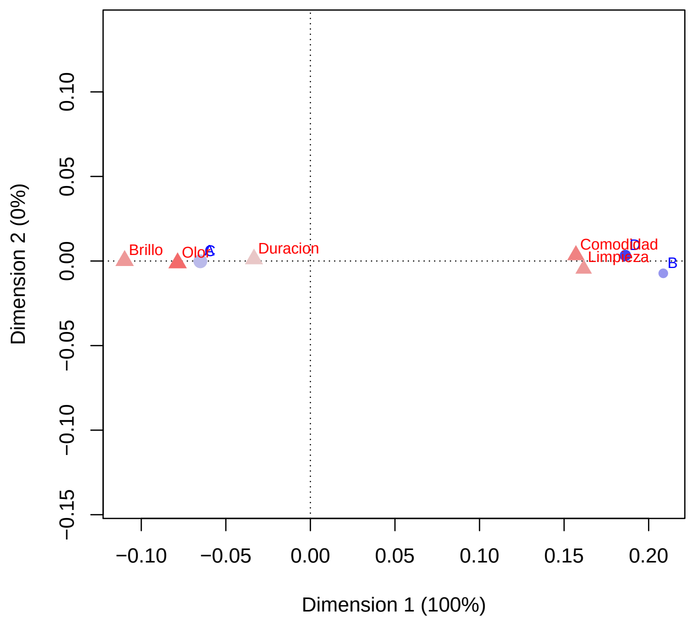
```
> Tabla <- c (68,60,67,45,35,
+            12,13,13,15,12,
+            95,84,94,63,49,
+            30,32,32,36,28)
> T <- matrix (Tabla, nrow=4, ncol=5, byrow=TRUE)
> colnames (T) <-
+   c ("Brillo", "Duracion", "Olor", "Comodidad", "Limpieza")
> rownames (T) <- c("A","B","C","D") # productos
> prop.table (T, 1)

     Brillo  Duracion      Olor Comodidad  Limpieza
A 0.2472727 0.2181818 0.2436364 0.1636364 0.1272727
B 0.1846154 0.2000000 0.2000000 0.2307692 0.1846154
C 0.2467532 0.2181818 0.2441558 0.1636364 0.1272727
D 0.1898734 0.2025316 0.2025316 0.2278481 0.1772152

> prop.table (T, 2)

      Brillo   Duracion      Olor  Comodidad   Limpieza
A 0.33170732 0.31746032 0.3252427 0.28301887 0.28225806
B 0.05853659 0.06878307 0.0631068 0.09433962 0.09677419
C 0.46341463 0.44444444 0.4563107 0.39622642 0.39516129
D 0.14634146 0.16931217 0.1553398 0.22641509 0.22580645

> ## install.packages("ca")
> library (ca)
> fit <- ca (T)
> print (fit)   # masas, inercias, distancias

 Principal inertias (eigenvalues):
           1        2     3
Value      0.012582 6e-06 0
Percentage 99.95%   0.05% 0%


 Rows:
               A         B         C        D
Mass     0.311438  0.073613  0.436014 0.178935
ChiDist  0.065222  0.208781  0.065075 0.186260
Inertia  0.001325  0.003209  0.001846 0.006208
Dim. 1  -0.581422  1.860199 -0.580128 1.660301
Dim. 2   0.044351 -3.016536 -0.077138 1.351749
```

```
 Columns:
          Brillo  Duracion      Olor Comodidad  Limpieza
Mass     0.232163  0.214043  0.233296  0.180068  0.140430
ChiDist  0.109845  0.033375  0.078534  0.157030  0.161638
Inertia  0.002801  0.000238  0.001439  0.004440  0.003669
Dim. 1  -0.979262 -0.297358 -0.700025  1.399622  1.440441
Dim. 2   0.084562  0.487906 -0.479702  1.436375 -1.928341

> summary (fit) # + calidades y contribuciones

Principal inertias (eigenvalues):

 dim    value      %   cum%   scree plot
 1      0.012582 21.0  100.0  *************************
 2      6e-06000  0.0  100.0
 3      00000000  0.0  100.0
        -------- -----
 Total: 0.012588 100.0


Rows:
    name   mass  qlt  inr    k=1  cor ctr    k=2 cor ctr
1 |    A |  311 1000  105 |  -65 1000 105 |    0   0   1 |
2 |    B |   74 1000  255 |  209  999 255 |   -7   1 670 |
3 |    C |  436 1000  147 |  -65 1000 147 |    0   0   3 |
4 |    D |  179 1000  493 |  186 1000 493 |    3   0 327 |

Columns:
    name   mass  qlt  inr    k=1  cor ctr    k=2 cor ctr
1 | Brll |  232 1000  223 | -110 1000 223 |    0   0   2 |
2 | Drcn |  214 1000   19 |  -33  999  19 |    1   1  51 |
3 | Olor |  233 1000  114 |  -79 1000 114 |   -1   0  54 |
4 | Cmdd |  180 1000  353 |  157 1000 353 |    3   0 372 |
5 | Lmpz |  140 1000  291 |  162  999 291 |   -5   1 522 |
```

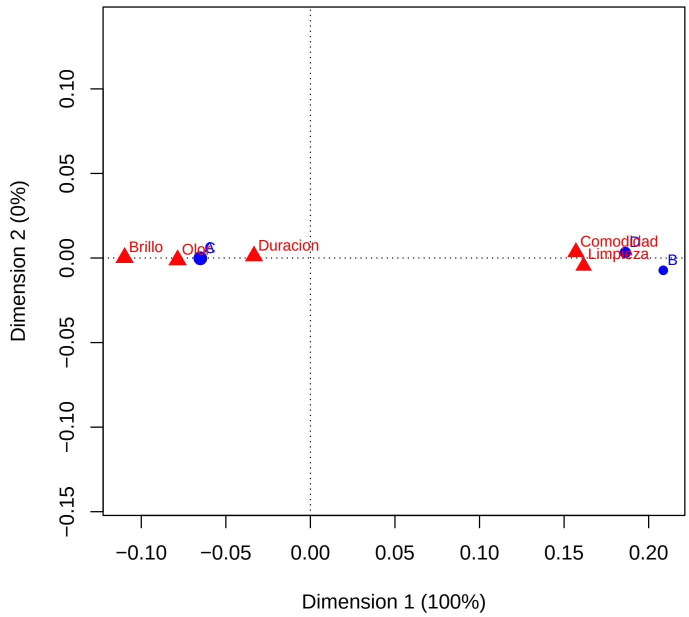
```
> plot (fit)    # mapa simétrico
```



```
> plot (fit,
+   mass = TRUE, # puntos proporcionales a la masa
+   contrib = "absolute"
+   ## intensidad del color según la inercia
+   )
```



```
> plot (fit,
+    mass = TRUE, # puntos proporcionales a la masa
+    contrib = "relative"
+    ## intensidad según calidad de reconstrucción
+    )
```



6.2. Salida 1: fit

```
> names(fit) # para ver qué información contiene

 [1] "sv"         "nd"         "rownames"   "rowmass"    "rowdist"
 [6] "rowinertia" "rowcoord"   "rowsup"     "colnames"   "colmass"
[11] "coldist"    "colinertia" "colcoord"   "colsup"     "N"
[16] "call"

> ## desv. típica de las componentes
> ## (raíces cuadradas de los valores propios)
> fit$sv

[1] 0.1121674600 0.0024127691 0.0006347953

> ## coordenadas de las componentes tipificadas en puntos fila
> fit$rowcoord

        Dim1        Dim2        Dim3
A -0.5814217  0.04435112 -1.36780514
B  1.8601985 -3.01653604 -0.15743945
C -0.5801285 -0.07713762  0.97519601
D  1.6603007  1.35174854  0.06917413

> ## coordenadas de las componentes del punto fila 1 (producto A)
> fit$rowcoord[,1]

         A          B          C          D
-0.5814217  1.8601985 -0.5801285  1.6603007

> ## idem pero sin tipificar
> fit$rowcoord[1,] * fit$sv

         Dim1          Dim2          Dim3
-0.0652165930  0.0001070090 -0.0008682763

> ## variabilidad aportada por los puntos fila
> fit$rowinertia

[1] 0.001324849 0.003208730 0.001846397 0.006207788

> ## variabilidad aportada por el punto fila 1
> fit$rowinertia[1]

[1] 0.001324849

> ## cálculo de la inercia del punto fila 1
> sum ( (fit$rowcoord[1,] * fit$sv) ^ 2) * fit$rowmass[1]

[1] 0.001324849
```

```
> ## distancia de los puntos fila al origen de coordenadas
> fit$rowdist

[1] 0.06522246 0.20878067 0.06507475 0.18626027

> ## cálculo de la distancia del punto 1
> sqrt (sum ((fit$rowcoord[1,] * fit$sv) ^ 2))

[1] 0.06522246
```

6.3. Salida 2: summary(fit)

```
> s2 <- summary(fit)
> names (s2)

[1] "scree"   "rows"    "columns"

> s2$rows

  name mass  qlt  inr  k=1  cor ctr  k=2 cor ctr
1    A  311 1000  105  -65 1000 105    0   0   1
2    B   74 1000  255  209  999 255   -7   1 670
3    C  436 1000  147  -65 1000 147    0   0   3
4    D  179 1000  493  186 1000 493    3   0 327

> s2$rows[,1] # nombres de las categoría asociada a cada fila

[1] "A" "B" "C" "D"

> s2$rows[,2] # frecuencia relativa en tanto por 1000

[1] 311  74 436 179

> round (1000 * apply(T,1,sum) / sum(T))

  A   B   C   D
311  74 436 179

> s2$rows[,3] # calidad de la reconsrucción en tanto por 1000

[1] 1000 1000 1000 1000

> s2$rows[,4] # inercia aportada por cada punto en tanto por 1000

[1] 105 255 147 493

> s2$rows[,5] # coordenadas en la primera componente, por 1000

[1] -65 209 -65 186

> ## cor: contribución (relativa) del eje 1
> ## a la posición del punto, por 1000
> s2$rows[,6]

[1] 1000  999 1000 1000

> ## ctr: contribución (absoluta) de los puntos
> ## a variabilidad del eje 1, en tanto por 1000
> s2$rows[,7]
```

```
[1] 105 255 147 493

> ## cálculo de la ctr para el eje 1
> s2$row[,2] * s2$row[,5]^2 / sum (s2$row[,2] * s2$row[,5]^2)

[1] 0.1044400 0.2569235 0.1464174 0.4922191

> s2$rows[,8] # coordenadas en la 2a componente, por 1000

[1]  0 -7  0  3

> ## cor: contribución (relativa) del eje 2
> ## a la posición de un punto en tanto por 1000
> s2$rows[,9]

[1] 0 1 0 0

> ## ctr: contribución (absoluta) de los puntos
> ## a la variabilidad del eje 2 en tanto por 1000
> s2$rows[,10]

[1]   1 670   3 327
```