IV Torneo Matemático Triangular

Aragón – La Rioja – Navarra

Tudela, 11 de marzo de 2017

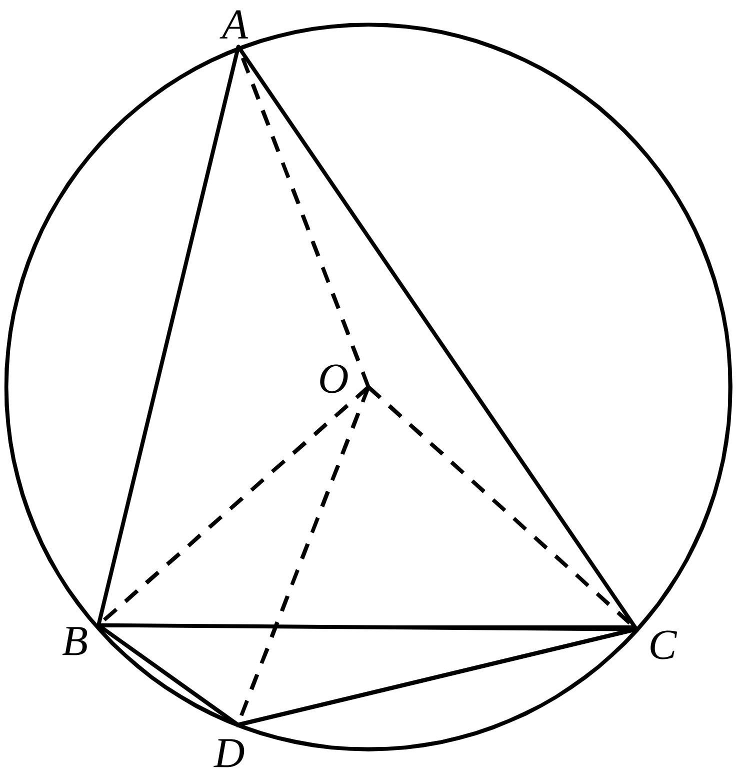
Algunos usos de simetrías y reflexiones con la bisectriz como referencia

Daniel Lasaosa Medarde

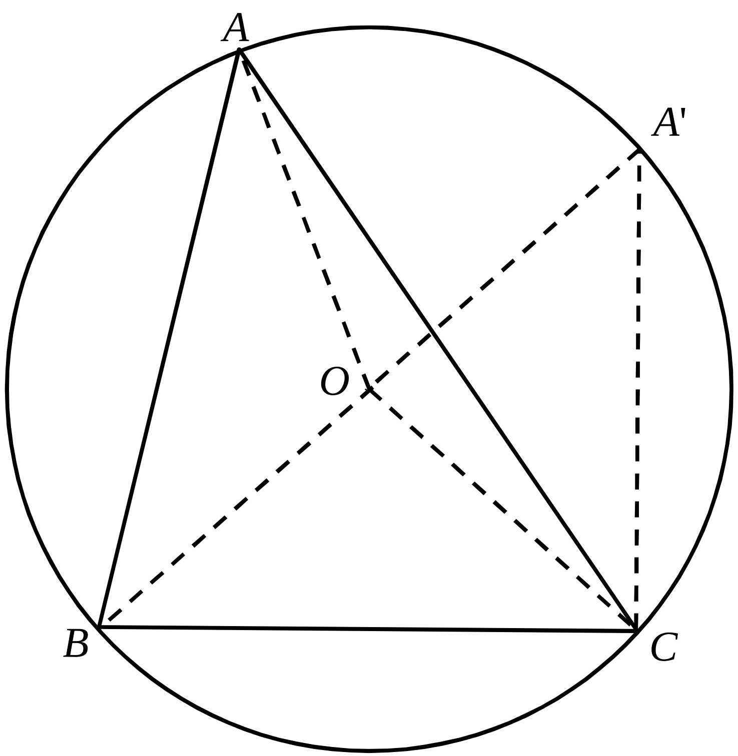
Índice

- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Resultados conocidos (I)
Arco capaz, cuadriláteros cíclicos, teorema del seno



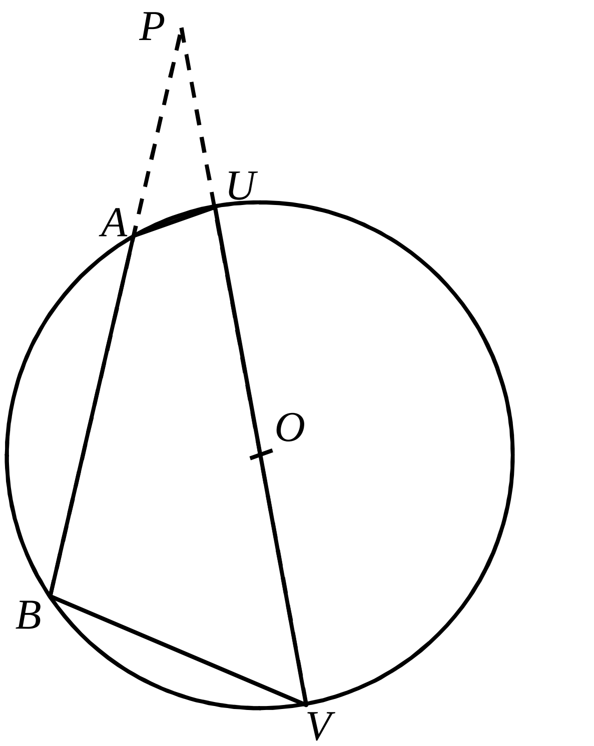
$$\angle BOC = 2\angle BAC = 360° - 2\angle BDC$$



$$BC = 2R\sin\angle BA'C$$
$$= 2R\sin\angle BAC = 2R\sin A$$

Daniel Lasaosa Medarde

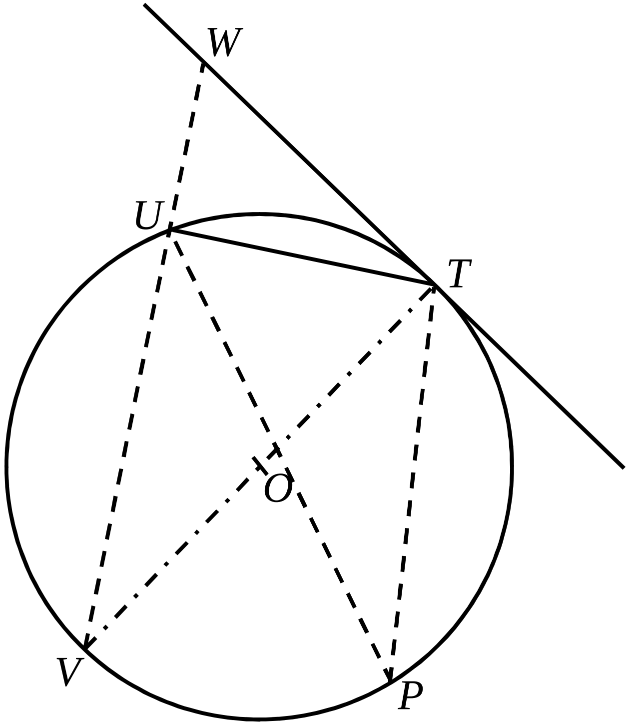
Resultados conocidos (II)
Potencia, ángulos semiinscritos



$$\angle PAU = \angle BVP, \quad \angle AUP = \angle VBP$$

$$PA \cdot PB = PU \cdot PV$$

$$= (OP - R)(OP + R) = OP^2 - R^2$$



TUV, WTV, WUT son semejantes

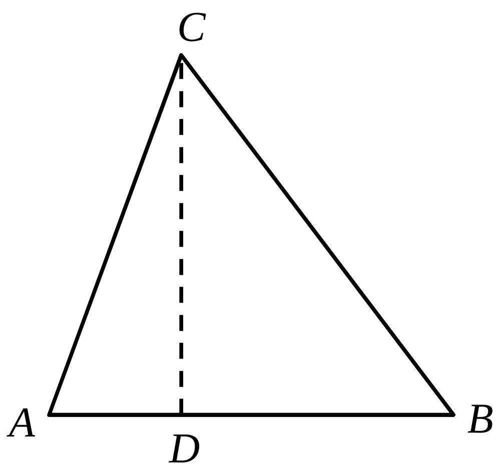
$$WT^2 = WU \cdot WV$$

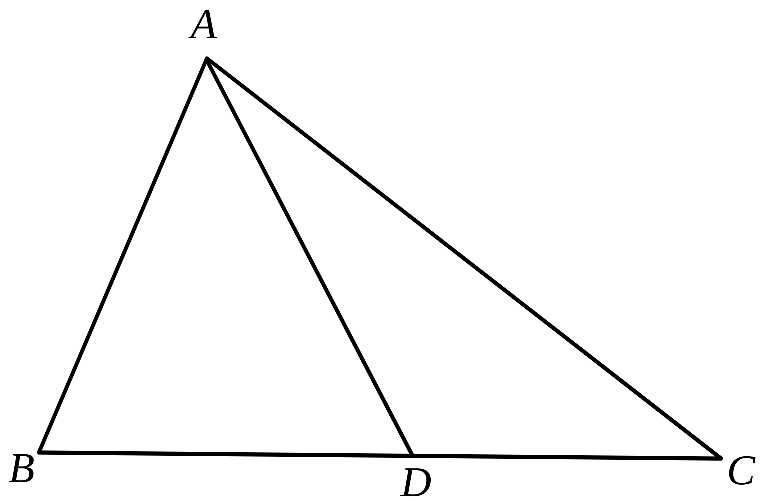
$$\angle UTW = \angle TVU = \angle TPU$$

IV Torneo Triangular 2017
Aragón – La Rioja – Navarra

Daniel Lasaosa Medarde

Resultados conocidos (III)
Teoremas del coseno y de Stewart





$$BC^2 = (AB - AD)^2 + CD^2$$
$$= (AB - AC\cos A)^2 + (AC\sin A)^2$$
$$= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$$

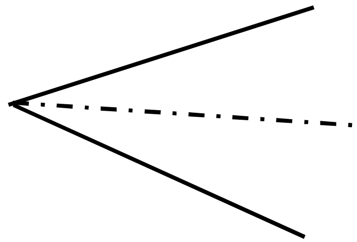
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD\cos\angle ADB$$
$$AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2AD \cdot CD\cos\angle ADB$$

$$AD^2 = \frac{AB^2 \cdot CD + AC^2 \cdot BD}{BC} - BD \cdot CD$$

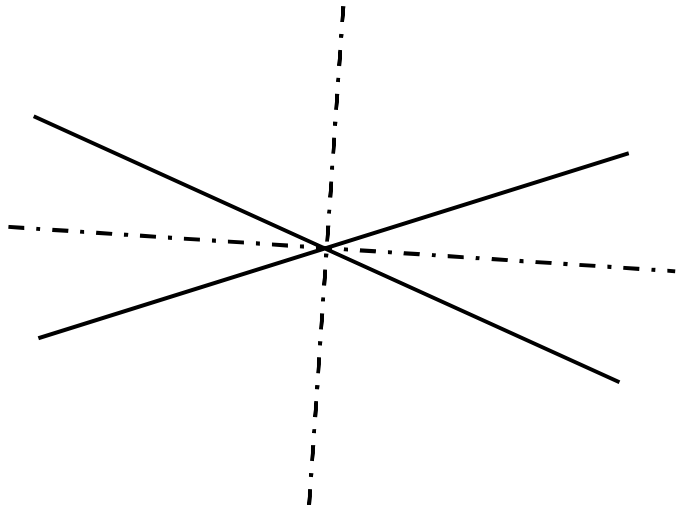
- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Algunas definiciones básicas (I)

Bisectriz de un ángulo

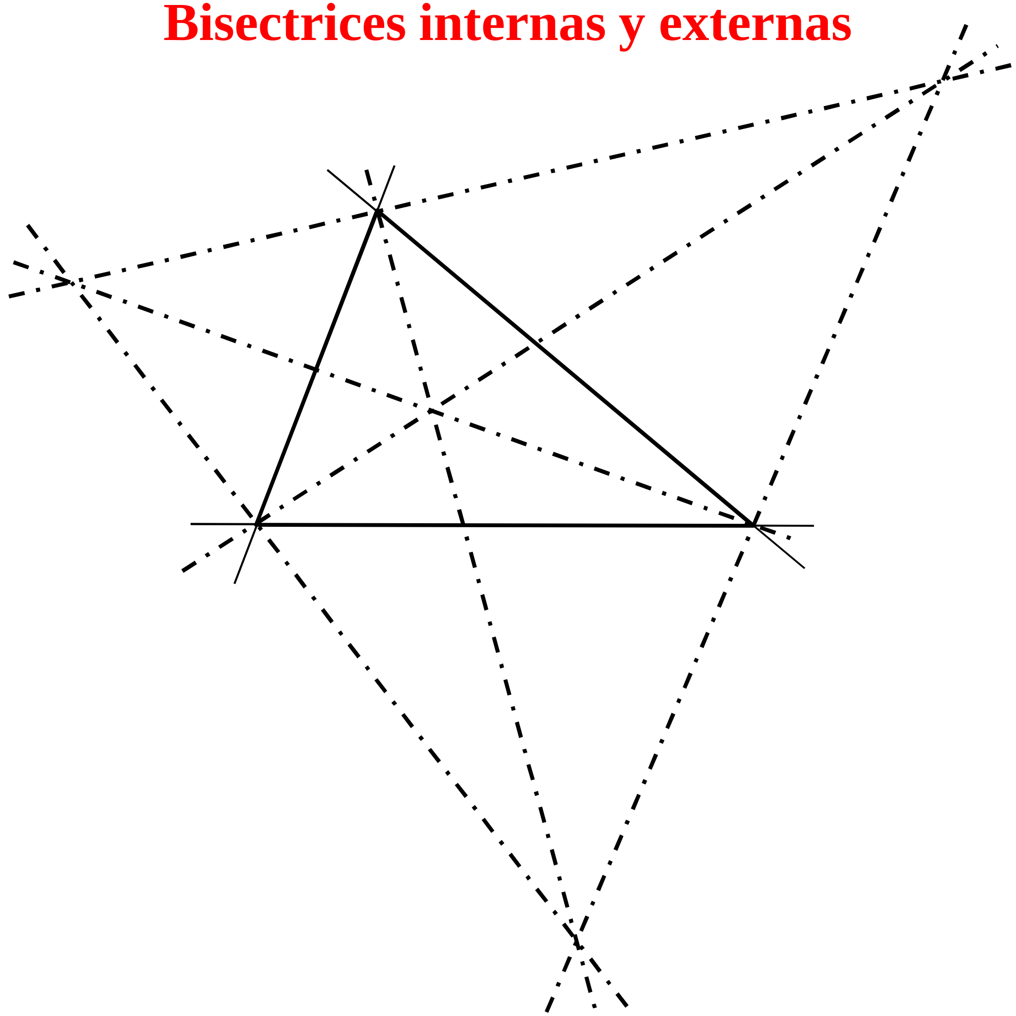


Bisectrices de dos rectas



Algunas definiciones básicas (II)

Bisectrices internas y externas



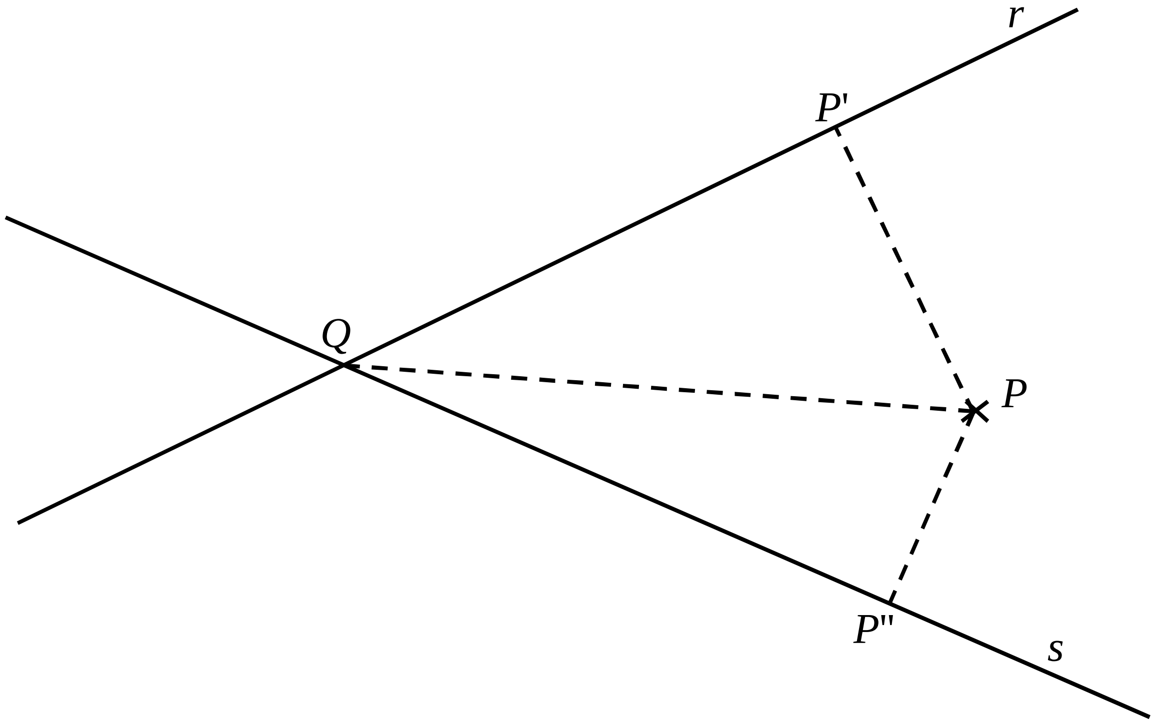
IV Torneo Triangular 2017
Aragón – La Rioja – Navarra

Daniel Lasaosa Medarde

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

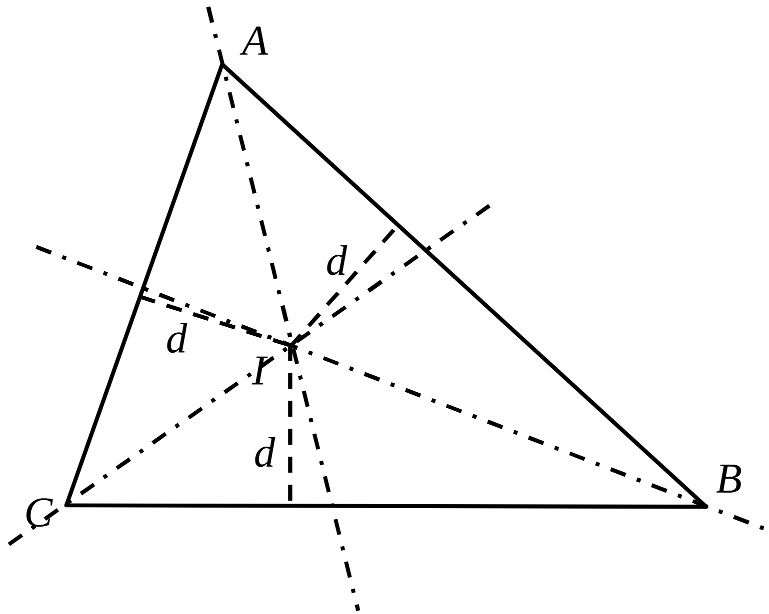
- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Primeras consecuencias (I)
Puntos a igual distancia de dos rectas



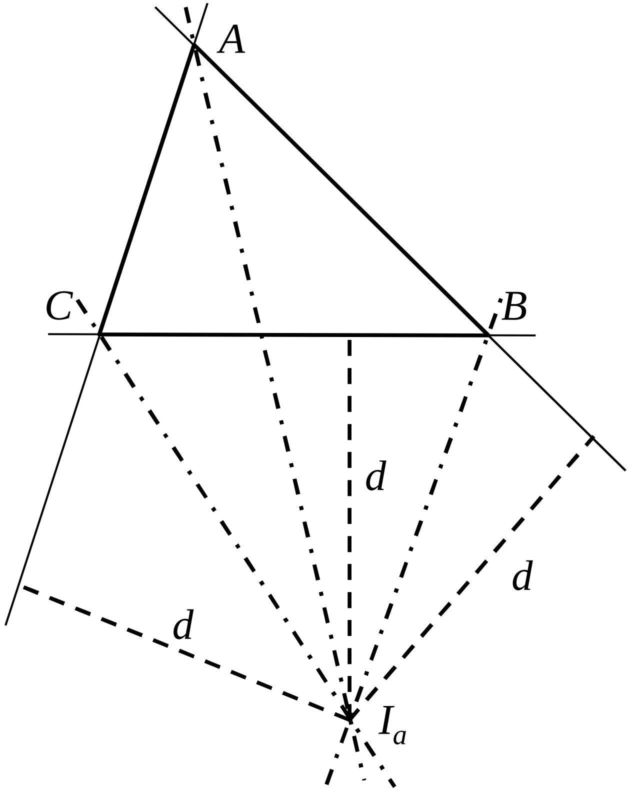
Un punto está a la misma distancia de dos rectas no paralelas dadas, si y sólo si está en una de las bisectrices de los ángulos formados por éstas

Primeras consecuencias (II)
Existencia de incentro



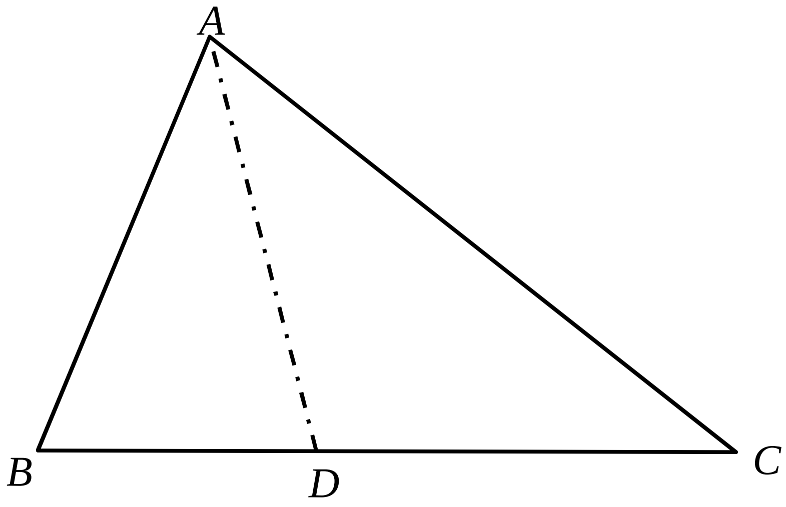
Las bisectrices interiores de un triángulo coinciden en un punto, que es el centro de una circunferencia tangente a los tres lados.

Primeras consecuencias (III)
Existencia de exincentros



Las bisectrices exteriores de dos ángulos del triángulo, y la bisectriz interior del tercero, coinciden en un punto, que es el centro de una circunferencia, tangente a un lado y a las prolongaciones de los otros dos.

Primeras consecuencias (IV)
Teorema de la bisectriz (I)



Usando el teorema del seno

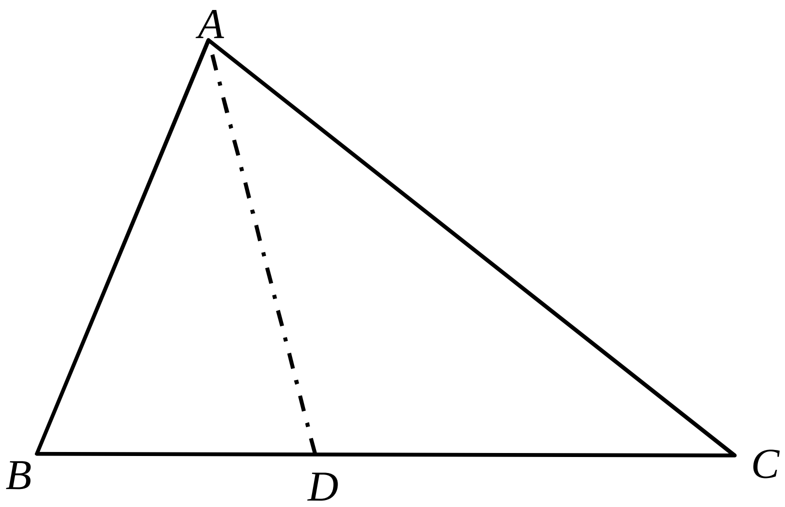
$$\frac{BD}{AB}=\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle BDA}=\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle CDA}=\frac{CD}{AC}$$

$$\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

$$BD=\frac{ca}{b+c} \qquad CD=\frac{ba}{b+c}$$

La bisectriz de un ángulo divide al lado opuesto en dos segmentos, que están en relación de proporcionalidad directa con los lados adyacentes.

Primeras consecuencias (V)
Teorema de la bisectriz (II)



Usando el teorema de Stewart

$$AD^2 = \frac{BD \cdot AC^2 + CD \cdot AB^2}{BC} - BD \cdot CD$$

$$= bc - \frac{bca^2}{(b+c)^2} = bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

Aplicando el teorema del coseno

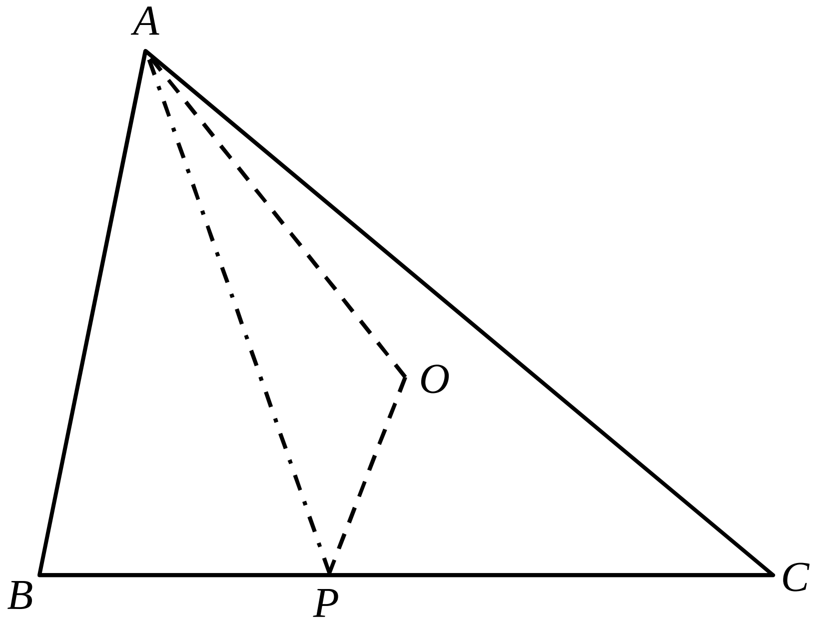
$$AD^2 = 2b^2c^2\frac{1+\cos A}{(b+c)^2} = \frac{4b^2c^2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Ejemplo de aplicación (1)

Problema 3, OME 2007 (Solución 1)

Sea *O* el circuncentro de un triángulo *ABC*. La bisectriz que parte de *A* corta al lado opuesto en *P*. Probar que se cumple $AP^2+OA^2-OP^2=bc$.



Solución:

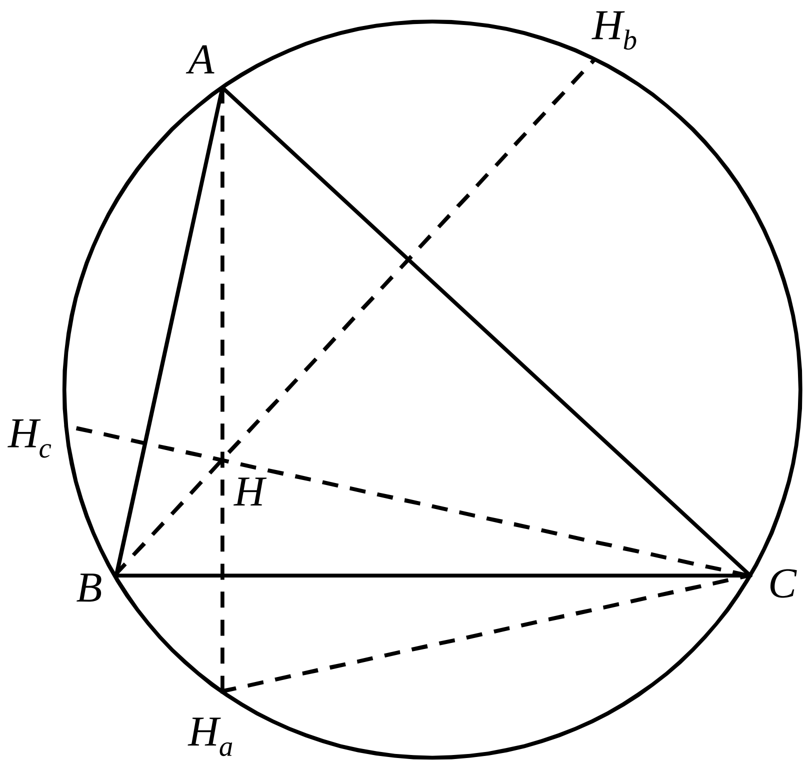
La potencia de P respecto a la circunferencia circunscrita a ABC es

$$R^2 - OP^2 = OA^2 - OP^2 = BP \cdot CP$$

Usando el teorema de Stewart

$$AP^2 = \frac{BP \cdot AC^2 + CP \cdot AB^2}{BC} - BP \cdot CP = bc - R^2 + OP^2 = bc - OA^2 + OP^2$$

Primeras consecuencias (VI)
Simétricos del ortocentro respecto de los lados



Por ser cada altura perpendicular al lado opuesto

$$\angle BAH = \angle BCH = 90° - B$$

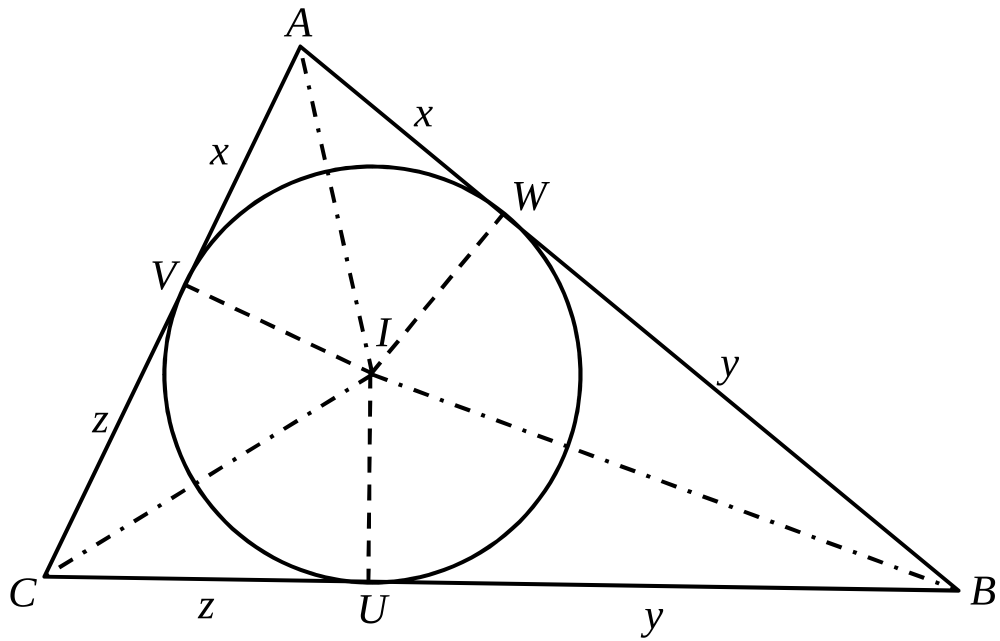
Luego

$$\angle BCH_a = \angle BAH_a = \angle BAH = \angle BCH$$

El simétrico del ortocentro *H* de *ABC*, respecto de cada lado de este triángulo, está sobre la circunferencia circunscrita a *ABC*.

- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Distancias a puntos de tangencia (I)
Circunferencia inscrita



$$\left.\begin{array}{l} y+z=a \\ z+x=b \\ x+y=c \end{array}\right\}$$

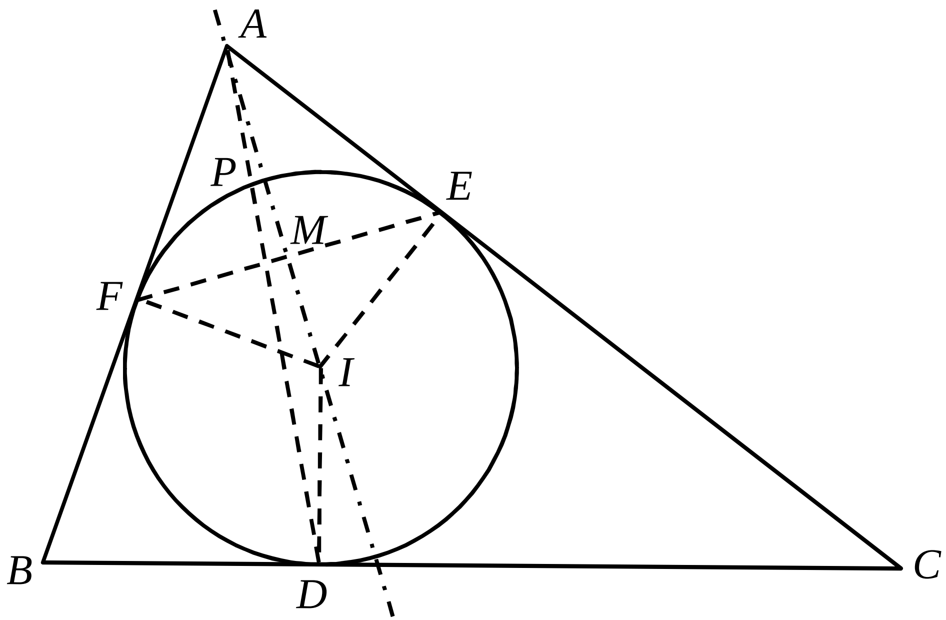
$$x=\frac{b+c-a}{2}$$

La distancia desde el vértice *A* a los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con los lados *AB*, *AC* es (*b*+*c*–*a*)/2.

Ejemplo de aplicación (2)

Problema 2, Ibero 1990

En el triángulo *ABC*, sea *I* el centro de la circunferencia inscrita, y *D*, *E*, *F* sus puntos de tangencia con los lados *BC*, *CA*, *AB* respectivamente. Sea *P* el otro punto de intersección de la recta *AD* con la circunferencia inscrita, y *M* el punto medio de *EF*. Demuestra que *P*, *I*, *M*, *D* están alineados o son concíclicos.

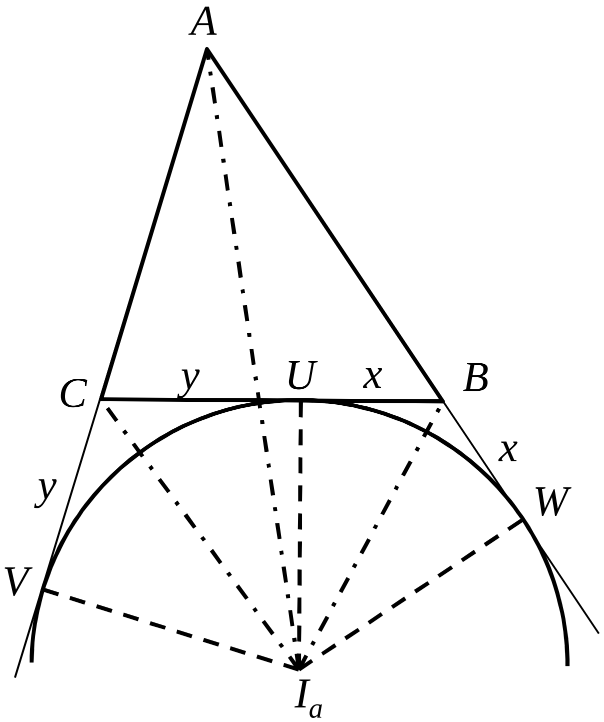


Solución:

El triángulo *AEF* es isósceles en *A*, luego la bisectriz de *A* y la altura desde *A* en *AEF* coinciden, y *M* está en *AI*. Como *AME* y *AEI* son semejantes, usando la potencia de *A* respecto de la circunferencia inscrita se tiene

$$AM \cdot AI = AE^2 = AP \cdot AD$$

Distancias a puntos de tangencia (II)
Circunferencias exinscritas



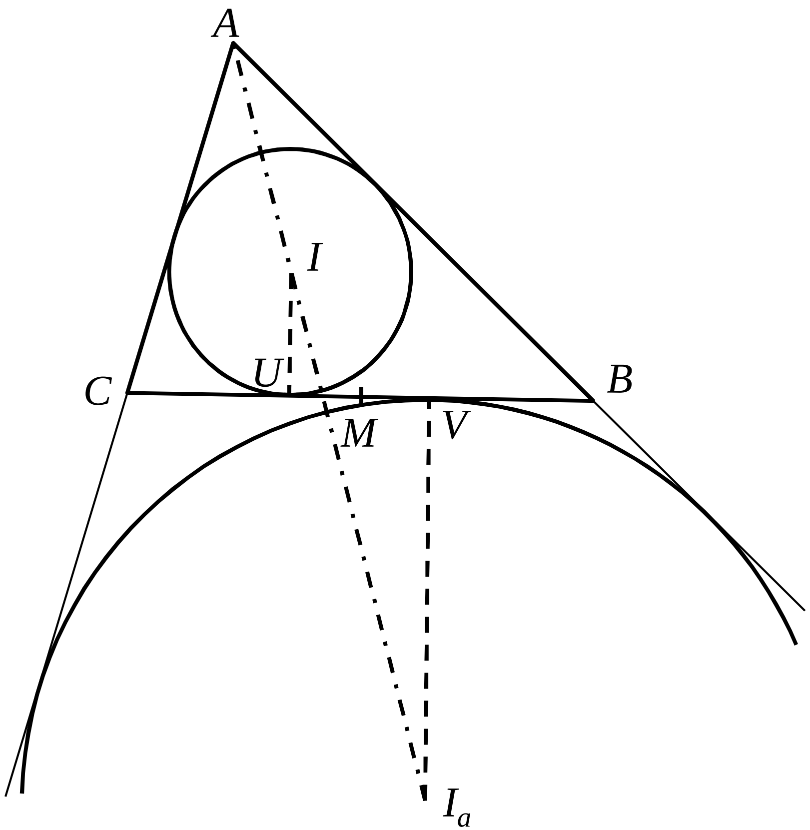
$$\left.\begin{aligned} c+x &= b+y \\ x+y &= a \end{aligned}\right\}$$

$$x = \frac{a+b-c}{2} \qquad y = \frac{c+a-b}{2}$$

$$b+y = c+x = \frac{a+b+c}{2}$$

La distancia desde el vértice *A* a los puntos de tangencia de la circunferencia exinscrita opuesta, con las prolongaciones de los lados *AB*, *AC*, es (*a*+*b*+*c*)/2.

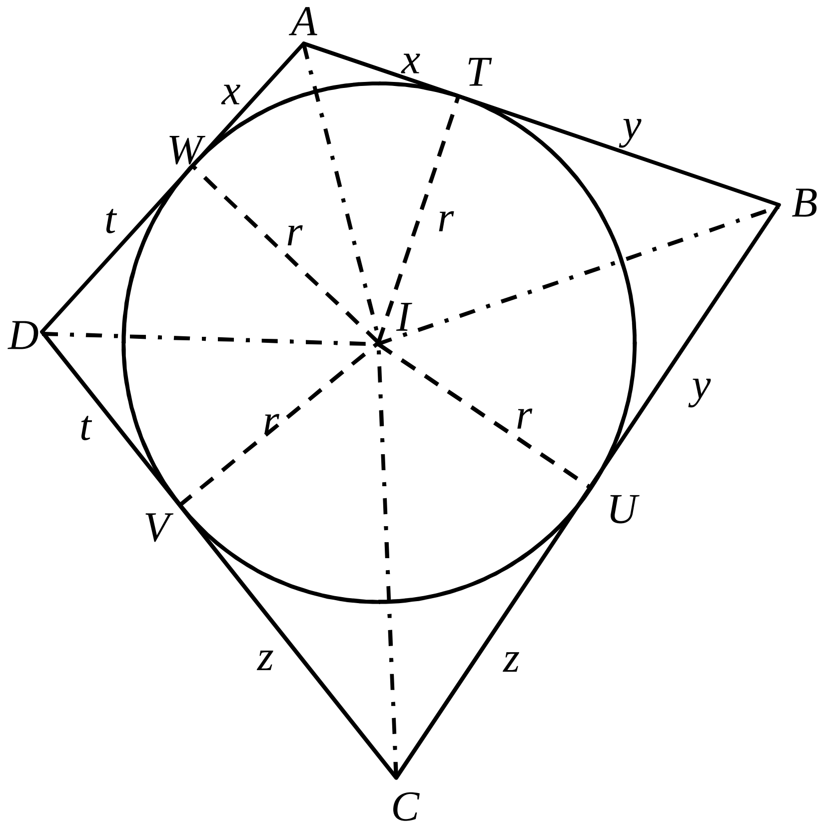
Distancias a puntos de tangencia (III)
Circunferencias inscrita y exinscritas



$$BV = CU = \frac{a+b-c}{2}$$

El punto de tangencia del lado *BC* con la circunferencia inscrita, y con la exinscrita opuesta a *A*, son simétricos respecto del punto medio de *BC*.

Distancias a puntos de tangencia (IV)
Cuadriláteros circunscriptibles



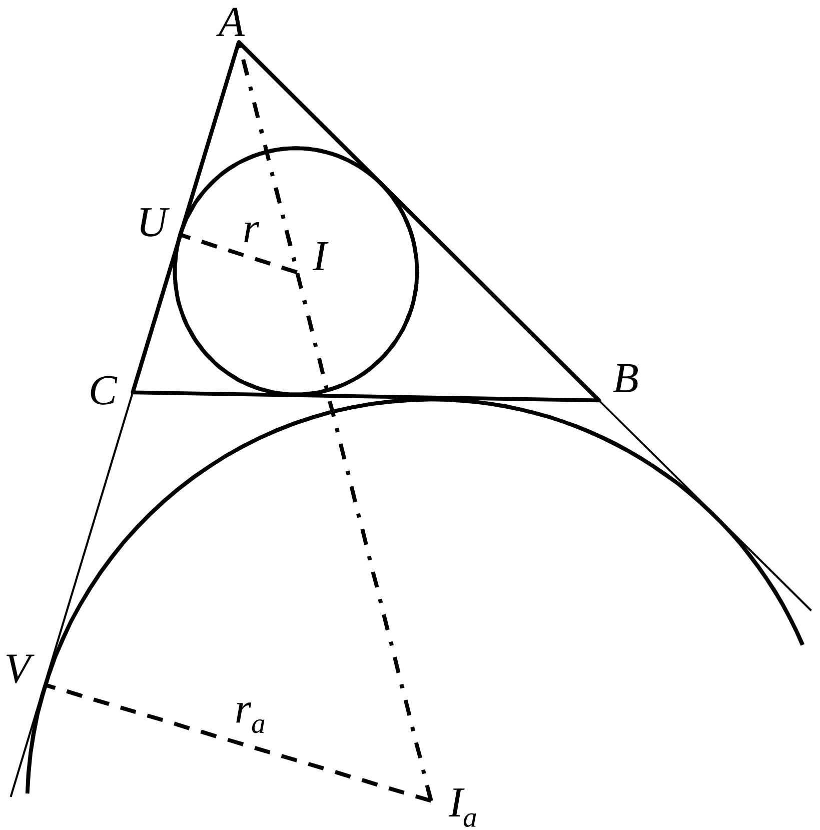
$$AB + CD = x + y + z + t = BC + DA$$

Un cuadrilátero convexo admite circunferencia inscrita si y sólo si las longitudes de dos lados opuestos suman lo mismo que las otras dos.

- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Daniel Lasaosa Medarde

Semejanzas con exinradios (I)



$$AU = \frac{b+c-a}{2} \qquad AV = \frac{a+b+c}{2}$$

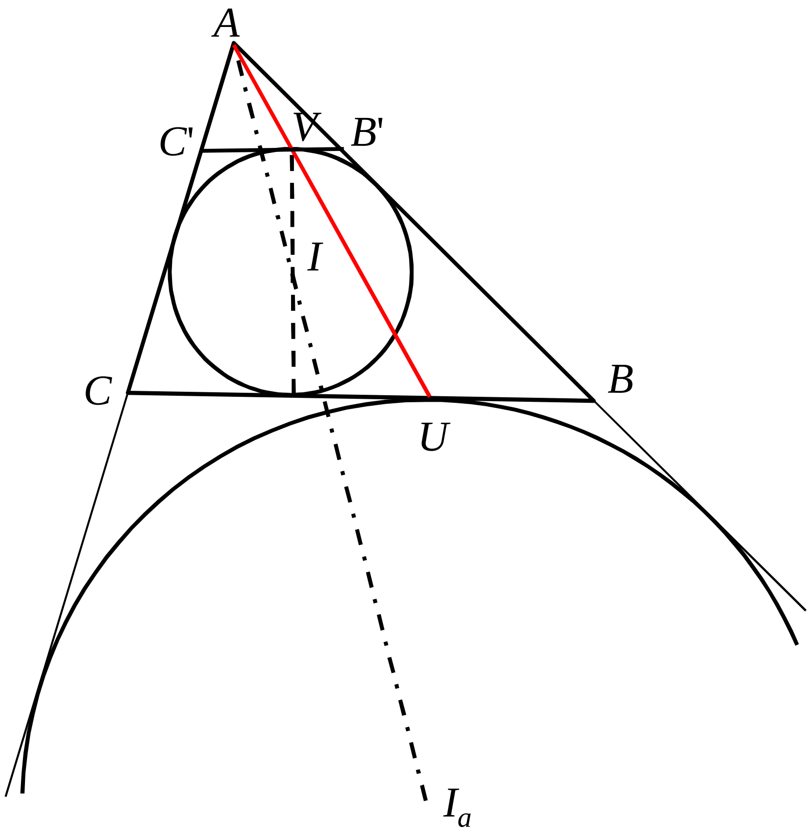
Por semejanza de AIU, AI_aV

$$\frac{r}{r_a} = \frac{AU}{AV} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$$

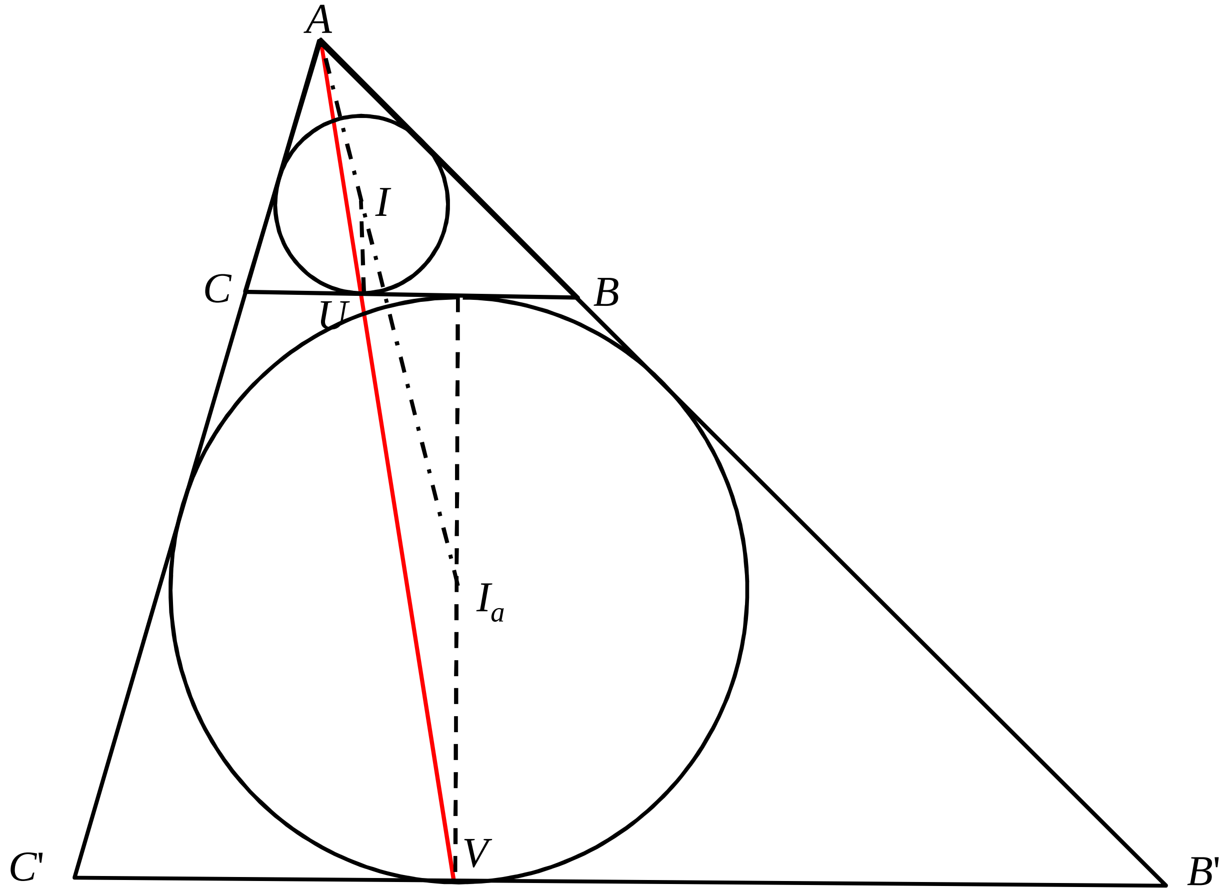
La suma de los inversos de los exinradios es igual al inverso del inradio.

Semejanzas con exinradios (II)



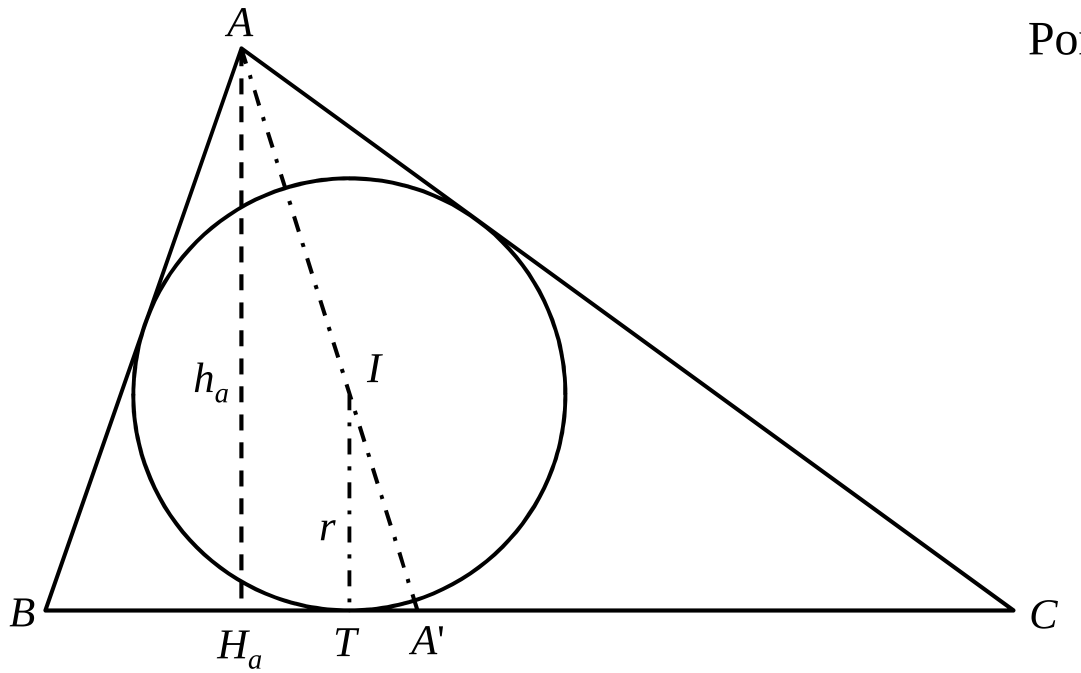
El vértice *A*, el punto de tangencia del lado *BC* con la circunferencia exinscrita opuesta, y el punto diametrálmente opuesto al de tangencia de la circunferencia inscrita con *BC*, están alineados.

Semejanzas con exinradios (III)



El vértice *A*, el punto de tangencia del lado *BC* con la circunferencia inscrita, y el punto diametrálmente opuesto al de tangencia de la circunferencia exinscrita opuesta con *BC*, están alineados.

Semejanzas con alturas



Por semejanza de $AA'H_a$ y $IA'T$

$$\frac{AA'}{h_a} = \frac{IA'}{r} = \frac{AI}{h_a - r}$$

Usando conocidas relaciones para el área S de ABC

$$\frac{h_a}{r} = \frac{a+b+c}{a}$$

Podemos expresar los cocientes entre distancias desde vértice a incentro y a pie de la bisectriz, en función de altura e inradio, luego en función de lados.

Ejemplo de aplicación (3)

Problema 1, IMO 1991

Dado un triangulo *ABC*, sea *I* el centro del círculo inscrito. Las bisectrices internas de los angulos *A*, *B*, *C* cortan a los lados opuestos en *A'*, *B'*, *C'*, respectivamente. Demostrar que

$$\boxed{\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}}$$

Solución: Por el resultado anterior,

$$\frac{AI}{AA'} = \frac{h_a - r}{h_a} = \frac{2S - ar}{2S} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

y el problema es equivalente a

$$\frac{1}{4} < \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)^3} \leq \frac{8}{27}$$

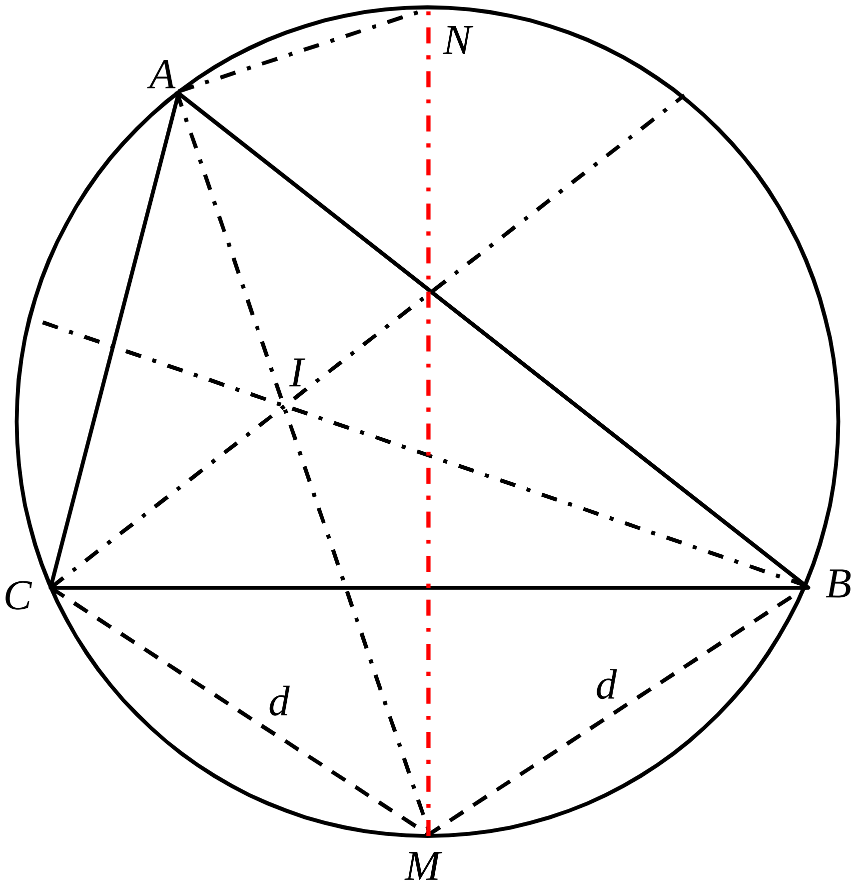
Para la desigualdad de la izquierda,

$$p = a+b+c$$
$$u = p - 2a$$
$$v = p - 2b$$
$$w = p - 2c$$

$$2p^3 < (p+u)(p+v)(p+w)$$
$$= 2p^3 + (uv + vw + wu)p + uvw$$

- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

La bisectriz y la circunferencia circunscrita (I)



$\angle MAN = 90°$

Luego MN es diámetro

$\angle BAM = \angle CAM$

$BM = CM$

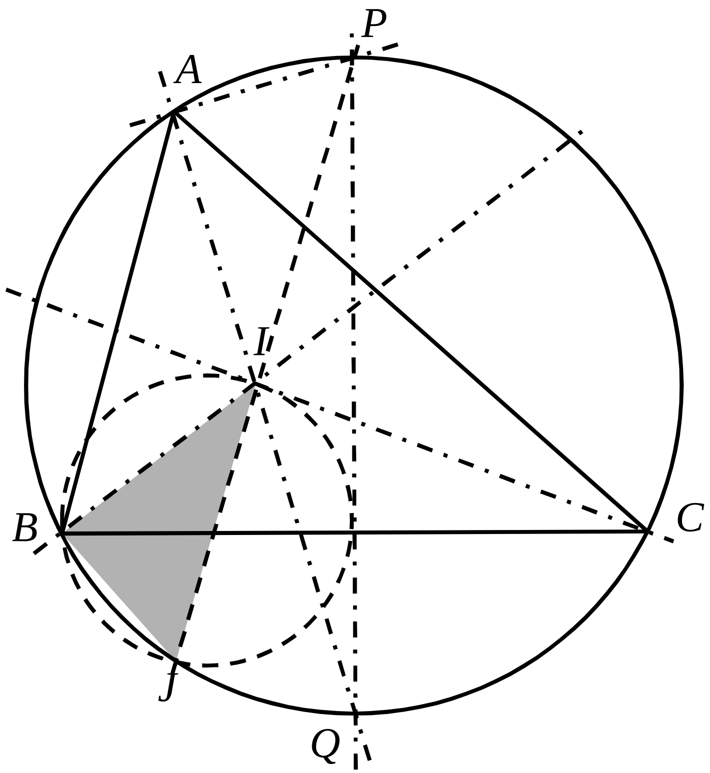
Luego M está en la mediatriz de BC

Las bisectrices interna y externa del ángulo *A*, cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita en dos puntos diametralmente opuestos, situados sobre la mediatriz de *BC*.

Ejemplo de aplicación (4)

Problema 4, Ibero 2009

Sea *ABC* un triángulo con incentro *I*, y sea *P* el punto de intersección de la bisectriz exterior del ángulo *A* con el circuncírculo de *ABC*. La recta *PI* corta por segunda vez al circuncírculo de *ABC* en el punto *J*. Pruebe que los circuncírculos de los triángulos *JIB* y *JIC* son respectivamente tangentes a *IC* e *IB*.



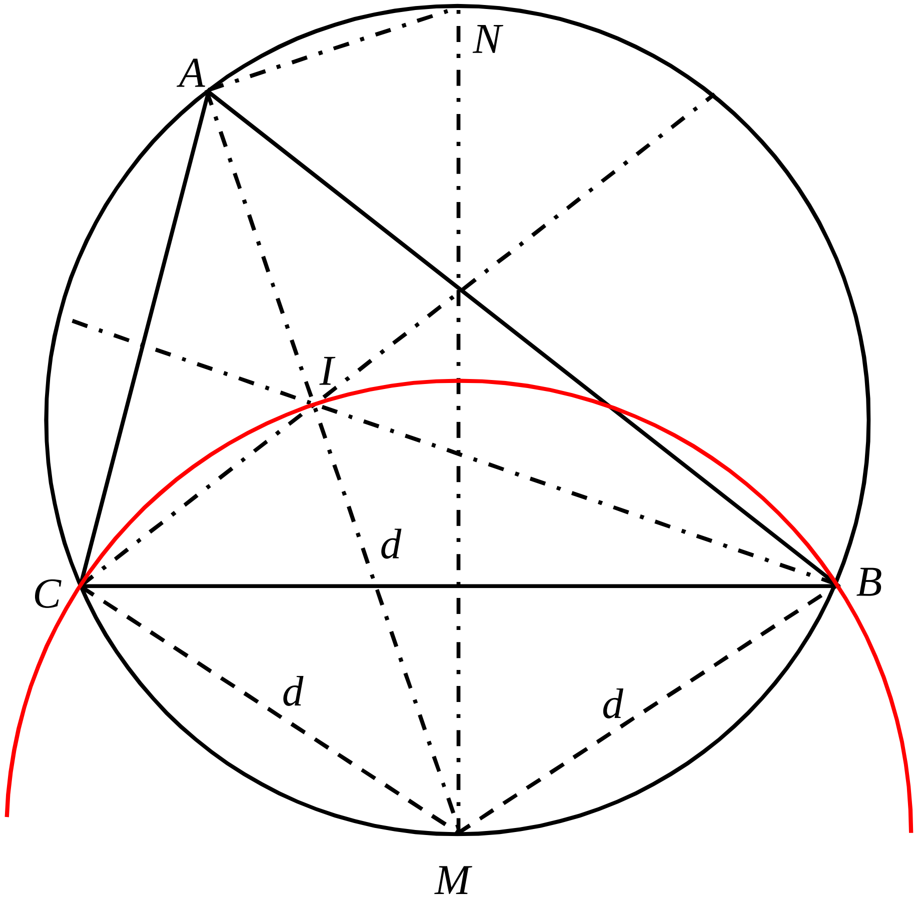
Solución:

Por ángulos semiinscritos, basta con demostrar que $\angle BJP+\angle BIC=180°$.
Pero como PQ es mediatriz de BC, y diámetro de la circunferencia circunscrita,
$\angle BJP=\angle BQP=90°-\angle BPQ=90°-\angle BAQ$.
Luego $\angle BJP=(B+C)/2=180°-\angle BIC$.

IV Torneo Triangular 2017
Aragón – La Rioja – Navarra

Daniel Lasaosa Medarde

La bisectriz y la circunferencia circunscrita (II)



$$\angle ICM = \angle ICB + \angle BAM = \frac{A+C}{2}$$

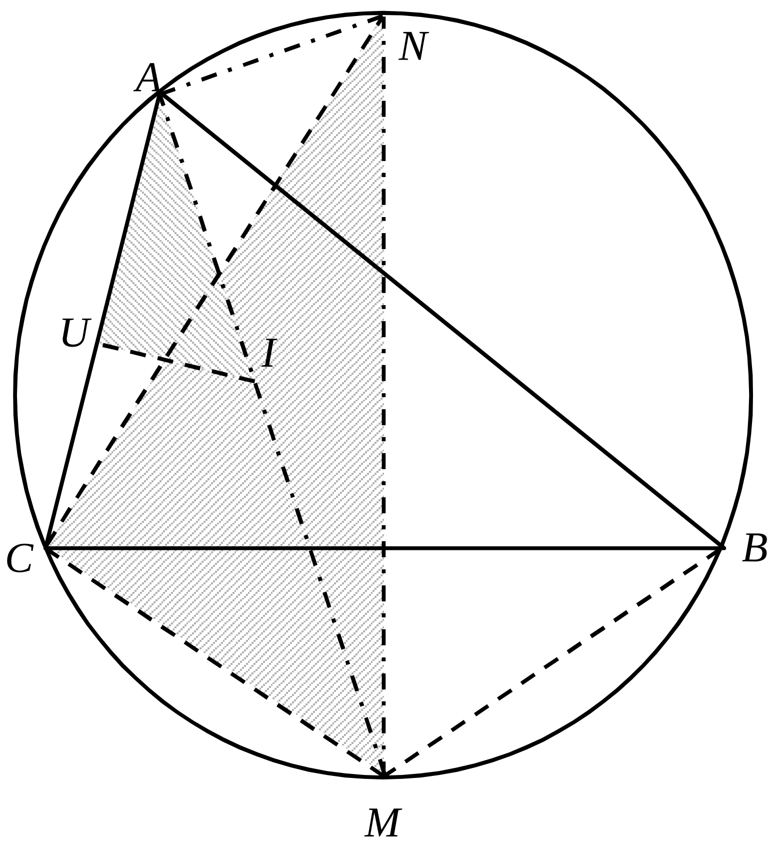
$$\angle CIM = 180° - \angle ICM - \angle CMA =$$
$$= \frac{A+C}{2} = \angle ICM$$

Luego *ICM* es isósceles en *M*

$$BM = CM = IM$$

El segundo punto de corte de la bisectriz de *A* con la circunferencia circunscrita es centro de una circunferencia que pasa por *B*, *C* y el incentro *I*.

La bisectriz y la circunferencia circunscrita (III)
Fórmula de Euler para el triángulo



Los triángulos *MCN* y *IUA* son semejantes

$$IM = CM = \frac{IU \cdot MN}{AI} = \frac{2Rr}{AI}$$

$$AI \cdot IM = 2Rr$$

La potencia del incentro respecto a la circunferencia circunscrita es 2*Rr*.
La distancia entre incentro y circuncentro cumple $OI^2=R^2-2Rr$.

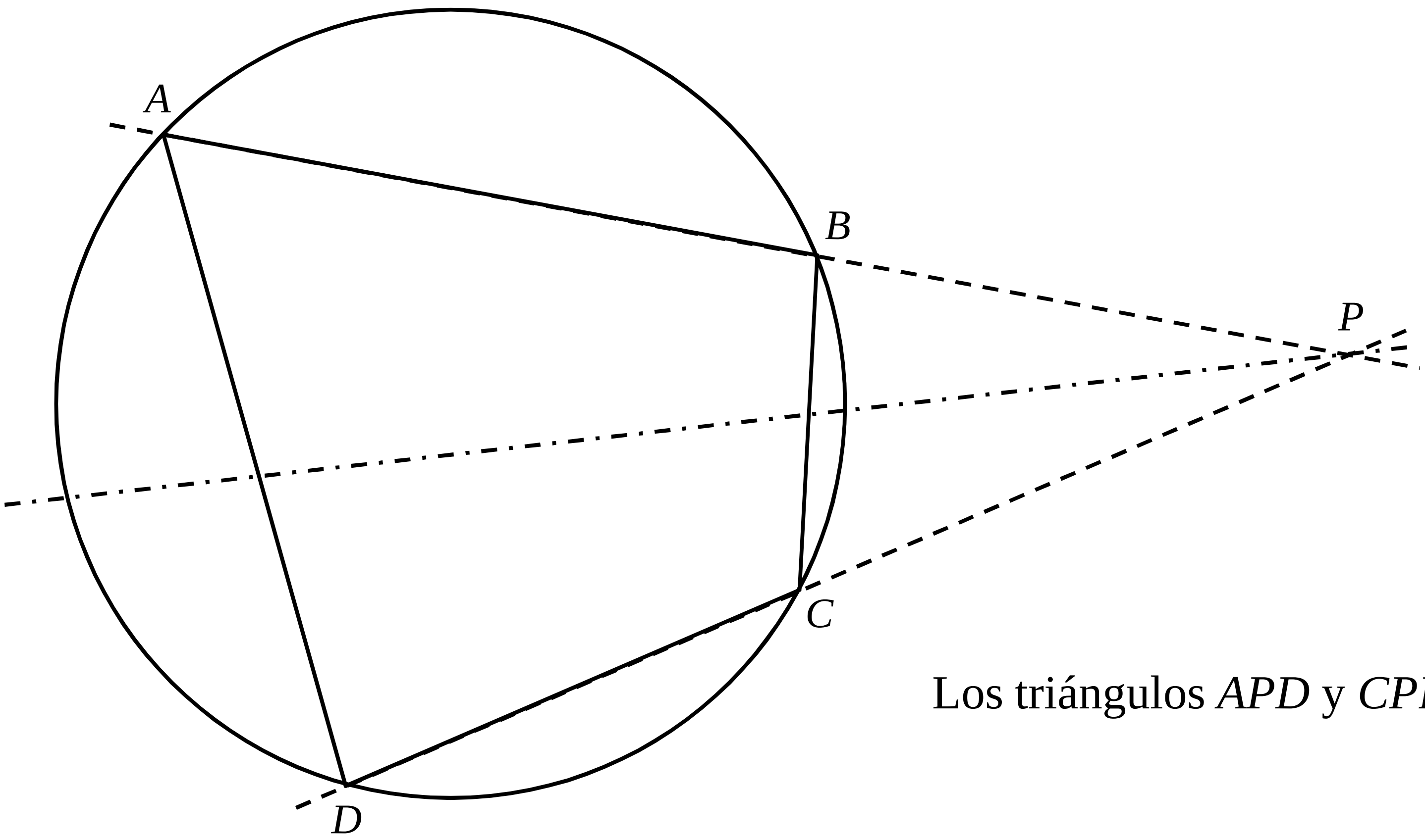
IV Torneo Triangular 2017
Aragón – La Rioja – Navarra

Daniel Lasaosa Medarde

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa

- Resultados conocidos
- Definiciones básicas
- Primeras consecuencias
- Distancias a puntos de tangencia
- Semejanzas con exinradios y alturas
- La bisectriz y la circunferencia circunscrita
- La bisectriz y cuadriláteros cíclicos

Bisectriz y cuadriláteros cíclicos (I)



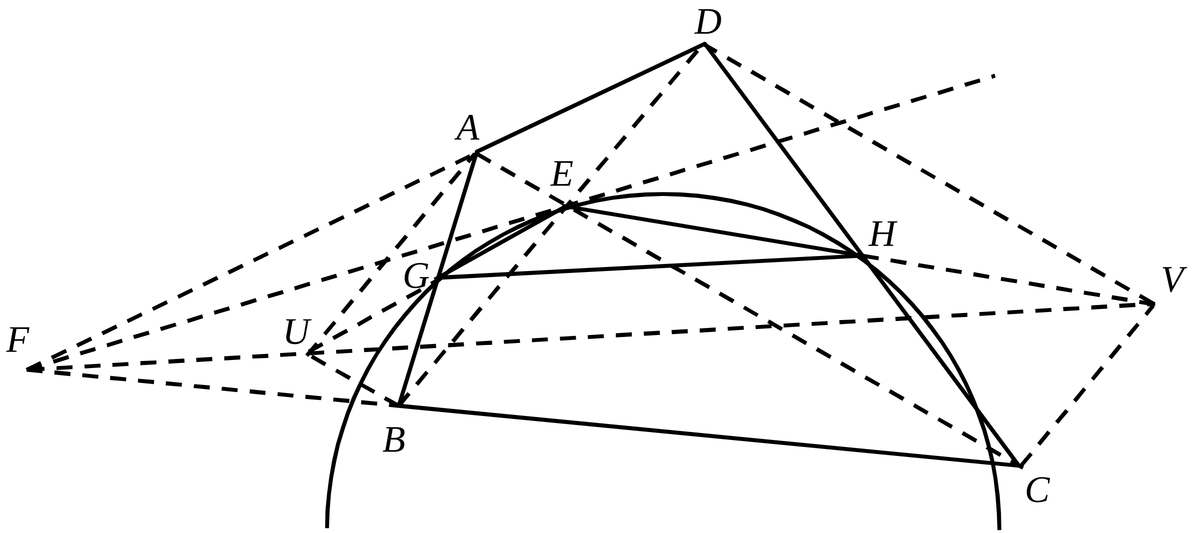
Los triángulos *APD* y *CPB* son semejantes

El triángulo *APD* se puede obtener como sigue: se refleja el triángulo *CPB* sobre la bisectriz de *BPC*, y se amplía con factor de escala *PD*/*PB*=*PA*/*PC*.

Ejemplo de aplicación (5)

Problema G4, lista corta IMO 2009

Dado un cuadrilatero cíclico *ABCD*, sean *E* el punto de interseccion de las diagonales *AC* y *BD*, y *F* el punto de intersección de las rectas *AD* y *BC*. Los puntos medios de *AB* y *CD* son *G* y *H*, respectivamente. Demuestra que *EF* es tangente a la circunferencia circunscrita al triangulo *EGH*.

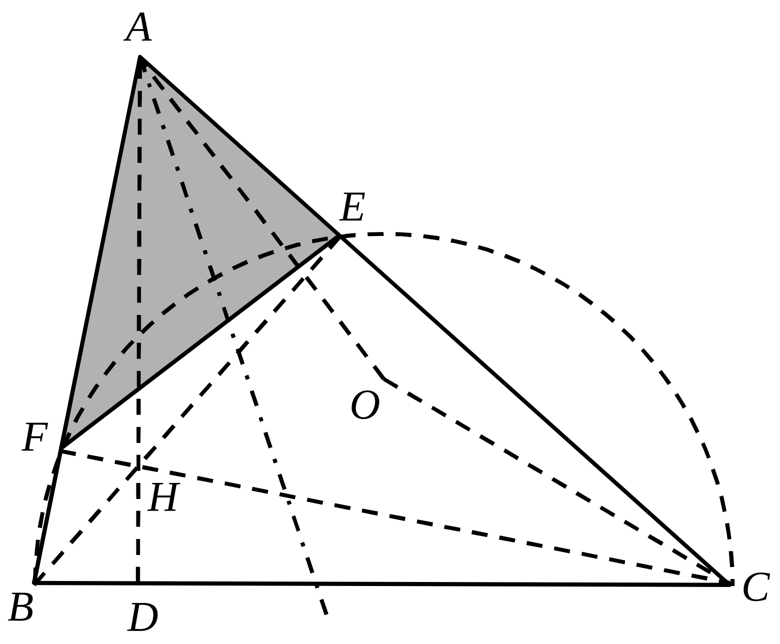


Solución:

Obtenemos *AUB* reflejando y escalando *CED*. Al ser *AEB* y *DEC* semejantes, *G* es punto medio de *UE*. De forma similar obtenemos *V* y *H* es punto medio de *EV*.

Como *U* y *V* se obtienen reflejando y escalando *EF*, *UV* es simétrica de *EF* respecto de la bisectriz de $\angle AFB$. Como *EV* y *EU* se obtienen una de otra por reflexión y escalado, $\angle EHG = \angle EVF = \angle FEU$.

Bisectriz y cuadriláteros cíclicos (II)
Simetría de *AH* y *AO* respecto de la bisectriz de *A*



Trazando el círculo de diámetro *BC* que corta a *AB*, *AC* en *F*, *E*, se tiene que $\angle AEB = \angle AFC = 90°$, luego *E*, *F* son los pies de las alturas desde *B*, *C*. Además *AEF* se obtiene a partir de *ABC* por reflexión y escalado.

Como *AOC* es isósceles en *O*,

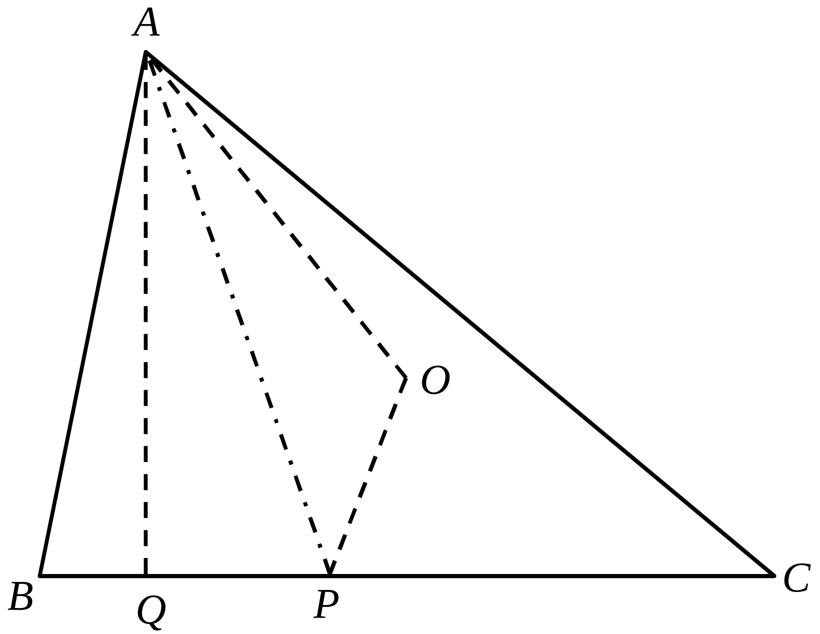
$$\angle CAO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOC = 90° - B = \angle BAH$$

El triángulo formado por los pies de las alturas desde *B*, *C*, y el vértice *A*, forman un triángulo que se obtiene de *ABC* por reflexión y escalado. Esa misma transformación convierte la recta *AH* en la recta *AO*.

Ejemplo de aplicación (6)

Problema 3, OME 2007 (Solución 2)

Sea *O* el circuncentro de un triángulo *ABC*. La bisectriz que parte de *A* corta al lado opuesto en *P*. Probar que se cumple $AP^2+OA^2-OP^2=bc$.



Solución:

Aplicando el teorema del coseno a *AOP*, obtenemos:

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = 2R \cdot AP \cos \angle OAP$$

Como $\angle OAP=\angle QAP$, $AP\cos\angle OAP=AQ$, Luego usando conocidas relaciones para el área *S* de *ABC*, tenemos

$$AP^2 + OA^2 - OP^2 = 2R \cdot AQ = \frac{4RS}{a} = bc$$

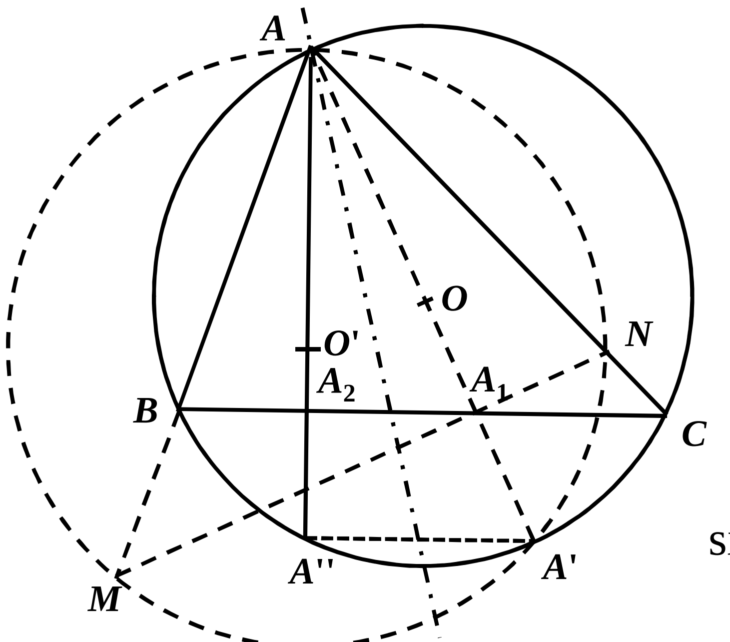
Ejemplo de aplicación (7)

Problema 3, OME 2016

Sea A' el punto diametralmente opuesto al vértice A del triángulo ABC en la circunferencia circunscrita, y sea A_1 el punto en el que la recta AA' corta al lado BC. La perpendicular a AA_1 trazada por A_1 corta a los lados AB y AC (o a sus prolongaciones) en M y N, respectivamente. Demostrar que los puntos A, M, A' y N están en una circunferencia cuyo centro se encuentra en la altura desde A en el triángulo ABC.

Solución:

$$\frac{AA'}{AA''} = \frac{AA_1}{AA_2}$$



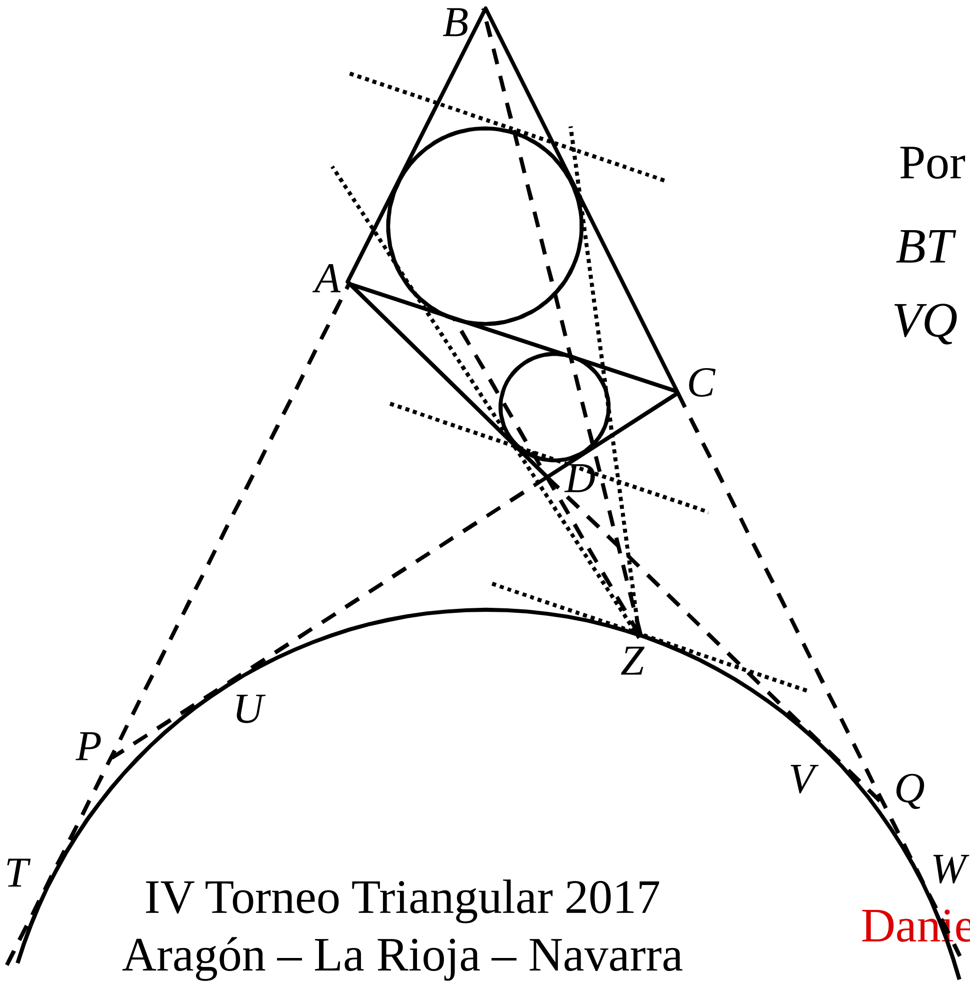
El triángulo ANM es el resultado de reflejar y escalar el triángulo ABC. Por ese mismo escalado A'' se convierte en A'.

Aplicamos a la circunferencia de ABC ese escalado, y pasa por los 4 puntos pedidos. Su centro está en la simétrica de AO respecto de la bisectriz

Ejemplo de aplicación (8-1)

Problema 6, IMO 2008

Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo con *AB≠BC*. Se sabe que existe un círculo Γ tangente a la semirrecta *BA* más allá de *A*, a la semirrecta *BC* más allá de *C*, y a las rectas *CD*, *DA*. Demostrar que las tangentes externas comunes de las circunferencias inscritas en *ABC* y *ACD*, se cortan en un punto de Γ.



Solución:

Por las simetrías en los puntos de tangencia,

$$BT = BW; \qquad PT = PU; \qquad DU = DV;$$

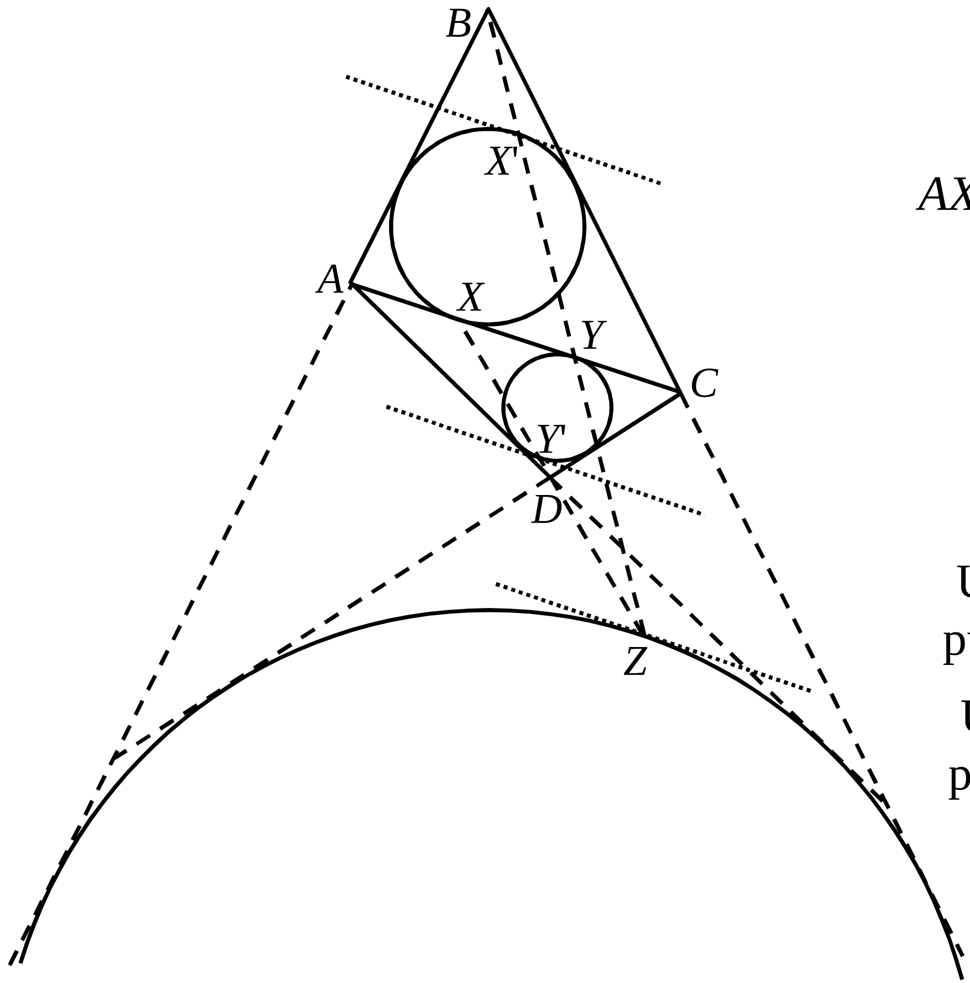
$$VQ = QW; \qquad AT = AV; \qquad CU = CW.$$

Luego

$$BA + AD = BT - AT + AV - DV$$

$$= BW - CW + CU - DU = BC + CD$$

Ejemplo de aplicación (8-2)



Solución (cont.):

$$AX = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{CD + AC - AD}{2} = CY$$

Los puntos B, X', Y están alineados
Los puntos D, X, Y' están alineados

Un escalado desde B nos permite llevar X' al punto de Γ donde la tangente es paralela a AC

Un escalado desde D nos permite llevar Y' al punto de Γ donde la tangente es paralela a AC

En ese punto Z de Γ convergen $X'Y$, XY'.