# VI Torneo Matemático Triangular
# Aragón – La Rioja – Navarra
Tudela, 23 de febrero de 2019

# Algunas estrategias para resolución de problemas en tableros

Daniel Lasaosa Medarde

# Índice

- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

# Lugares comunes en problemas de tableros (I)

Existen muchos problemas de tableros. Lo que tienen en común todos o casi todos es que existe una configuración en la que hay $m \times n$ casillas dispuestas en $m$ filas y $n$ columnas

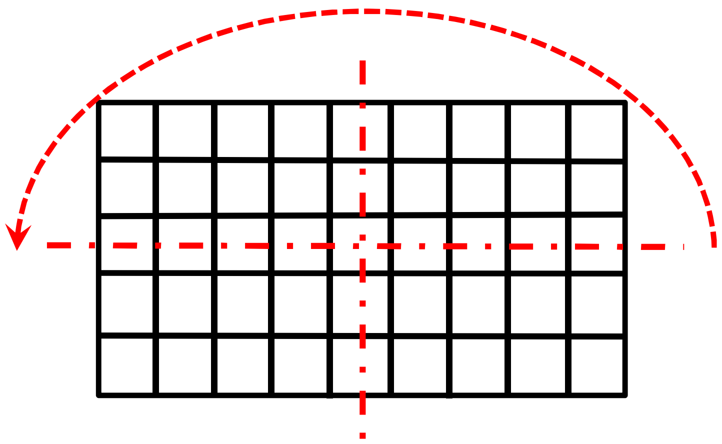
Sobre estas casillas suele existir una disposición de baldosas que lo cubren total o parcialmente (problemas de recubrimiento), o se realiza una asignación de algún tipo sobre las filas y columnas (problemas de relleno con letras, números o colores), o existen fichas de algún tipo (de dominó, de tetris, de ajedrez, de damas,…) que han de cumplir algún requisito (problemas de posicionamiento) o que han de moverse de acuerdo a alguna regla (problemas de recorrido)

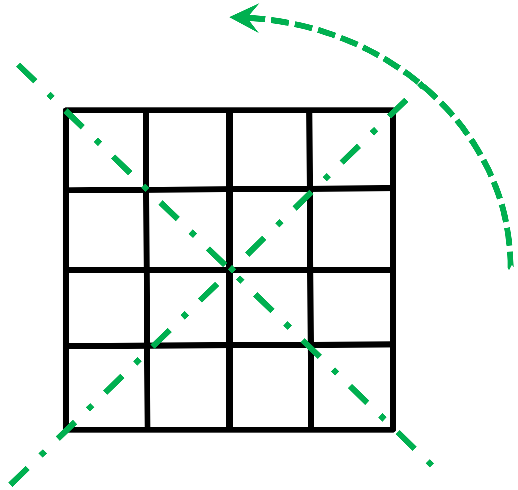
Aunque no existe ninguna regla general para atacar estos problemas, hay varios aspectos y técnicas comunes "clásicos" que se pueden tener en cuenta, y en general uno o varios ayudan a resolverlos y/o simplificarlos

# Lugares comunes en problemas de tableros (II)

Simetrías respecto de las mediatrices de los lados y del centro,
esta última equivalente a simetría de rotación de 180 °

Si el tablero es cuadrado, además simetría respecto de las diagonales y de rotación de 90°

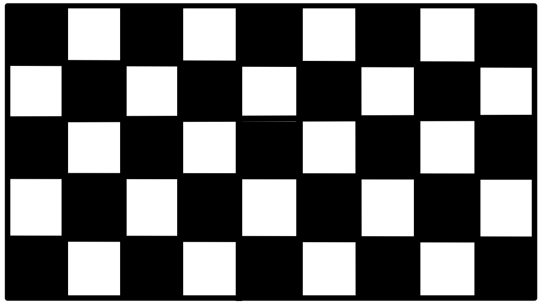




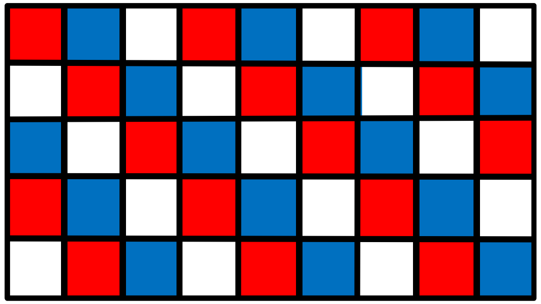
**<u>El desafío es encontrar simetrías útiles en la resolución del problema</u>**

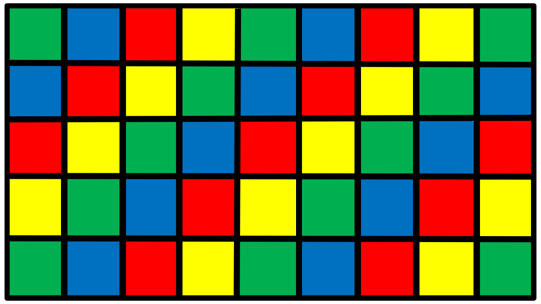
# Lugares comunes en problemas de tableros (III)

Colorear el tablero como si fuera de ajedrez – equivalentemente, asignar a la casilla ($i$,$j$) (fila $i$, columna $j$) la paridad de $i$+$j$



O también asignar colores según el resto de $i$+$j$ con otro cociente

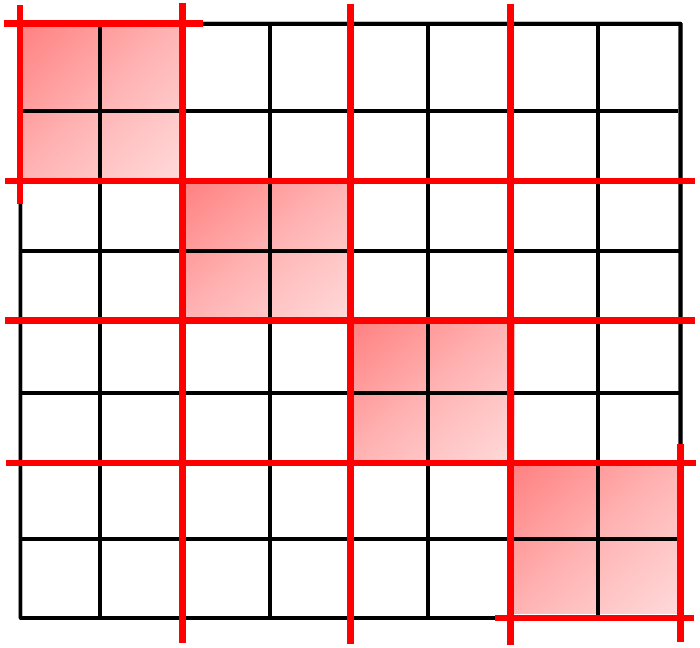




**El desafío es encontrar coloraciones útiles en la resolución del problema**

# Lugares comunes en problemas de tableros (IV)

Partir un tablero en subtableros más pequeños para simplificar el razonamiento o el proceso de colorear, contar o asignar



Aunque en la figura se han mostrado subtableros del mismo tamaño, no tiene por qué ser así, puede ser más conveniente que sean distintos

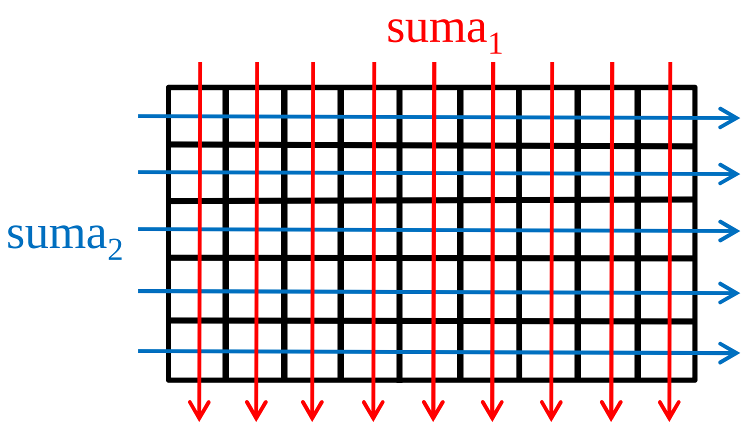
A veces nos basta con considerar sólo algunos de los subtableros para el propósito del problema, por ejemplo los de la diagonal principal

**El desafío es encontrar particiones útiles en la resolución del problema**

# Lugares comunes en problemas de tableros (V)

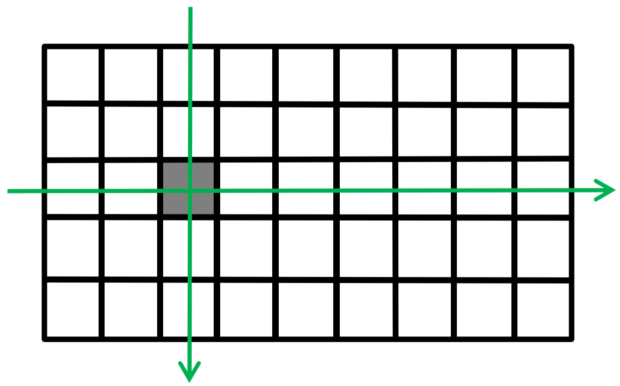
Utilizar la cuenta directa, o el conteo por filas, por columnas o por otros grupos de casillas, de alguna cantidad, incluso doble conteo

Sumar por filas y columnas y comparar




$suma_1 = suma_2$

Sumar sólo para las filas y columnas de ciertas casillas para las que suceda algo



**<u>El desafío es encontrar qué contar y cómo contarlo que sea útil en la resolución del problema</u>**

- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

# Un caso sencillo

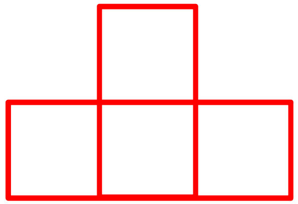
En una clase en la que hay $m$ filas y $n$ columnas de mesas, se pide a la clase que se muevan como quieran con tal de que cada persona ocupe un lugar inmediatamente contiguo al que ocupaba al principio (derecha, izquierda, adelante o atrás). Pueden ponerse de acuerdo previamente en una estrategia. ¿Para qué valores de $m$ y $n$ es posible hacer esto?

Si $m$ es par, podemos dividir la clase $m \times n$ en subtableros de $2 \times n$, y a su vez cada uno en subtableros $2 \times 1$, y en cada uno intercambiar a las dos personas que ocupan las mesas. Análogamente si $n$ es par.

Cuando $m$ y $n$ son ambos impares, coloreamos las mesas de la clase como un tablero de ajedrez. Cada persona ha de moverse de una blanca a una negra y viceversa, luego ha de haber el mismo número de cada color. Pero el total de mesas es $mn$, impar, contradicción.

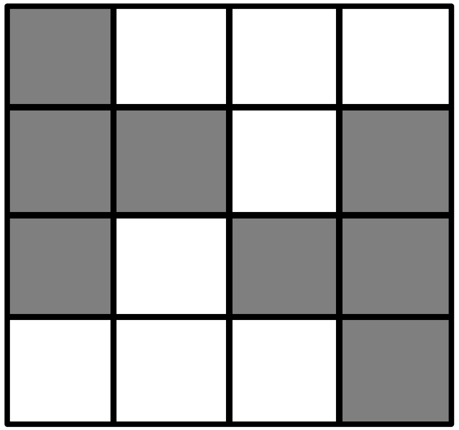
# Una coloración sencilla en un caso no tan sencillo (I)

Se dispone de un suelo de tamaño $n \times n$, y de baldosas de la forma indicada abajo, donde cada uno de los cuadritos que la compone es de tamaño $1 \times 1$. ¿Para qué dimensiones $n \times n$ es posible embaldosar el suelo sin partir baldosas, sin solaparlas y sin dejar huecos?
(Problema 6, OME 1998)



Como $k$ baldosas recubren un área $4k$, $n^2$ ha de ser múltiplo de 4, o $n$ es par.

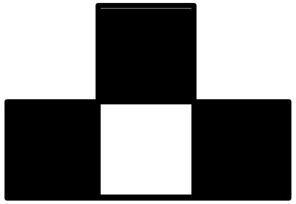
Claramente para $n=2$ no se puede, pero para $n=4$ sí podemos embaldosar, así:

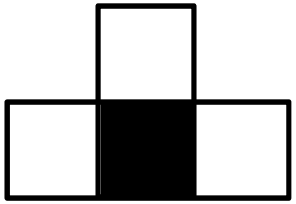


Partiendo en subtableros $4 \times 4$, podemos embaldosar para todo $n$ múltiplo de 4.

# Una coloración sencilla en un caso no tan sencillo (II)

Cuando coloreamos el tablero como si fuera de ajedrez, vemos que hay dos casos posibles para cómo quedaría coloreada cada baldosa:



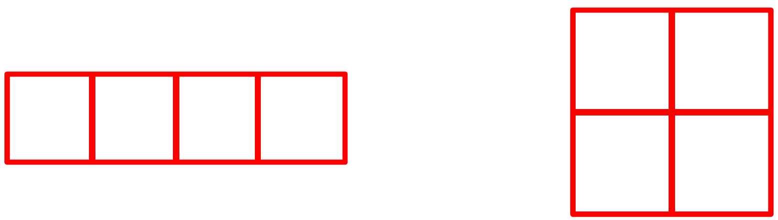


Si llamamos $u$ al número de baldosas del primer tipo y $v$ al del segundo tipo, tenemos que el número total de casillas negras y blancas es respectivamente $3u+v$ y $u+3v$. Pero ambos son iguales, luego $u=v$, y por la haber número total de baldosas par, el número total de casillas es múltiplo de 8, y $n$ es múltiplo de 4.

**Hemos resuelto el problema con una combinación de particionar el tablero, colorear adecuadamente, y contar el número de casillas coloreadas de dos formas**

# Una coloración no tan sencilla (I)

Para embaldosar una habitación de tamaño $n \times n$, se van a usar baldosas de los dos tipos que se muestran abajo, donde cada cuadrito que las compone es de tamaño $1 \times 1$. Se ve que con una cierta disposición de baldosas, se puede embaldosar la habitación sin romper baldosas, sin solapar y sin dejar huecos, y que haciéndolo así sobra una baldosa de uno de los dos tipos. Cuando se va a empezar a colocar las baldosas, se rompe una del otro tipo. ¿Es posible recolocar el resto de baldosas y la inicialmente sobrante para embaldosar la habitación?



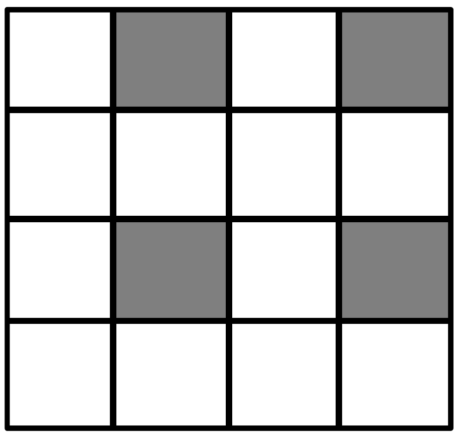
Como $k$ baldosas recubren un área $4k$, $n^2$ ha de ser múltiplo de 4, o $n$ es par.

# Una coloración no tan sencilla (II)

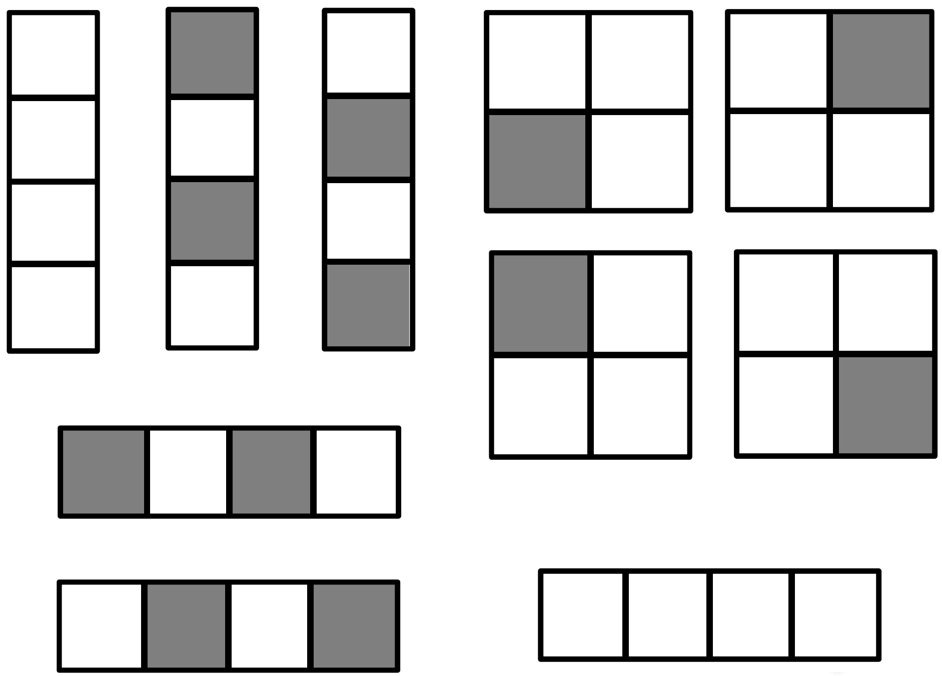
Para valores pequeños de *n* par, no parece ser posible sustituir una baldosa de un tipo por otro y aún y todo embaldosar la habitación.

Parece entonces que el problema va a consistir en encontrar una coloración que sea distinta para las baldosas de los dos tipos.

Coloreamos uno de cada cuatro Cuadrados 1x1, de esta manera:



Y así quedan las baldosas:



# Una coloración no tan sencilla (III)

Como cada baldosa cuadrada tiene exactamente una casilla coloreada, y cada baldosa alargada tiene o dos o ninguna casillas coloreadas, sustituir una por otra cambia obligatoriamente el número de casillas coloreadas cubiertas, luego no es posible.

Nótese entonces que esta coloración nos permite también resolver muchos otros problemas alternativos sobre esta misma configuración.
Por ejemplo:

Demostrar que si la habitación es $2n\times2n$, entonces el número de baldosas cuadradas tiene la misma paridad que $n$.

Obviamente hay $n^2$ casillas coloreadas, y el número de casillas coloreadas tienen la misma paridad que el de baldosas cuadradas.

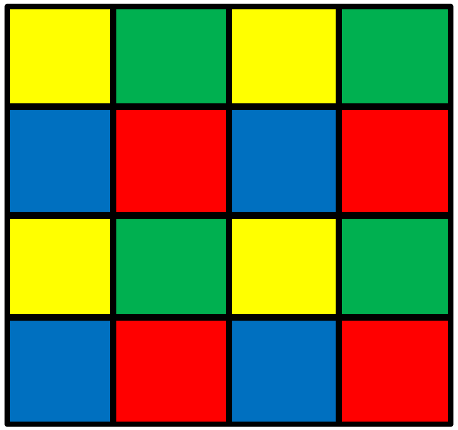
Demostrar que el número de baldosas alargadas es siempre par.

**¡¡¡Y todo gracias a usar la coloración adecuada!!!**

# ¡Y la coloración no tiene por qué ser única!

Con la coloración anterior se puede ver que el número de baldosas alargadas ha de ser siempre par: si el tamaño es $2n \times 2n$ el número total de baldosas es $n^2$, y el número de baldosas cuadradas tiene su misma paridad, luego la diferencia (el número de baldosas alargadas) es siempre par.

Pero lo mismo se puede conseguir con la siguiente coloración:



Cada baldosa alargada cubre dos cuadrados de dos colores distintos, y cada baldosa cuadrada uno de cada color. Pero hay el mismo número de cuadrados de cada uno de los cuatro colores.

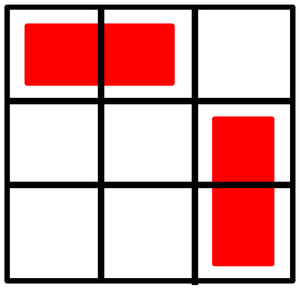
**Lo importante es encontrar y usar una coloración que se adapte al problema que nos ocupa**

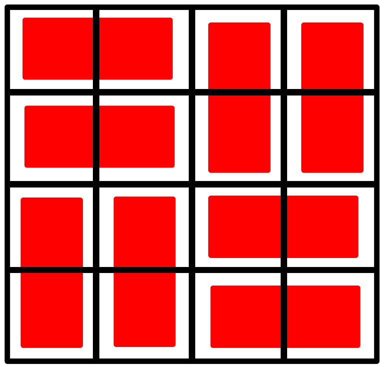
- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

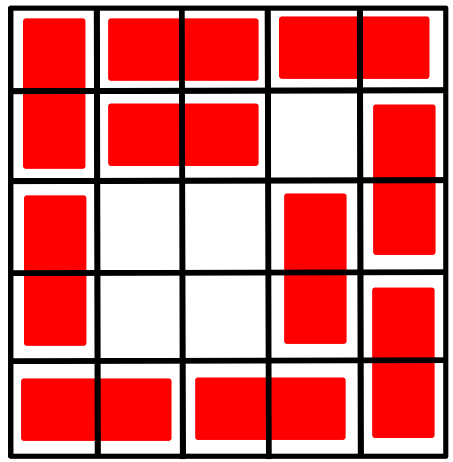
# Contando dominós (I)

Se ponen fichas de dominó en un tablero de tamaño $n \times n$ ($n \geq 3$) sin superponerse, de forma que cada ficha cubre dos casillas. El *valor* de una fila o columna es el número de fichas de dominó que cubren al menos una casilla de dicha fila o columna. Decimos que una configuración de dominós es *balanceada* si existe algún entero positivo $k$ tal que cada fila y cada columna tienen valor $k$. Demuestra que para cada $n \geq 3$ existe una configuración balanceada y encuentra el mínimo valor de ficha necesaria para tal configuración.
(Problema 4, EGMO 2018)

Probando, para valores de $n$ de 3, 4 y 5 podemos encontrar:

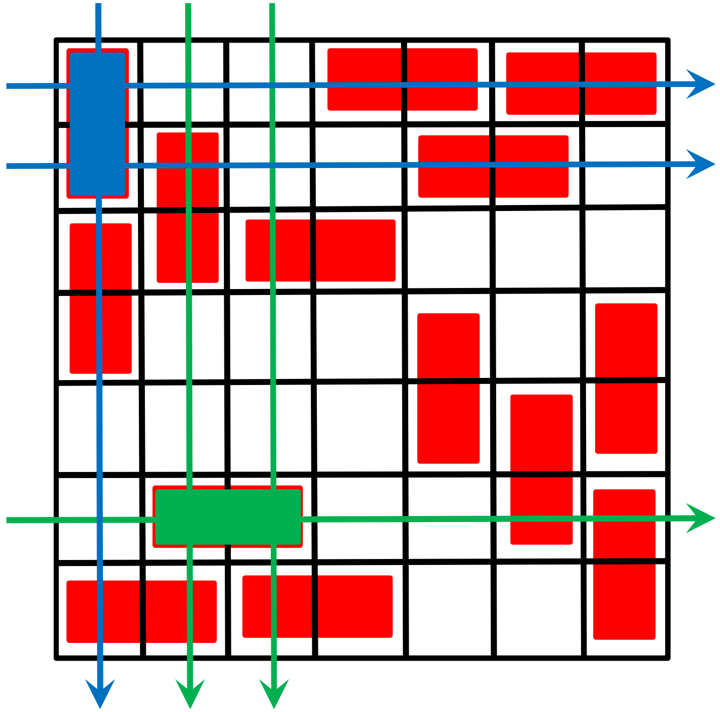






# Contando dominós (II)

Podemos también encontrar una configuración para $n$=7 con $k$=3. Podemos entonces conseguir valor $k$=1 para los múltiplos de 3, y para los demás valor $k$=3.
¿Son estos los valores mínimos para cada $n$?
Vamos a contar filas y columnas cubiertas…



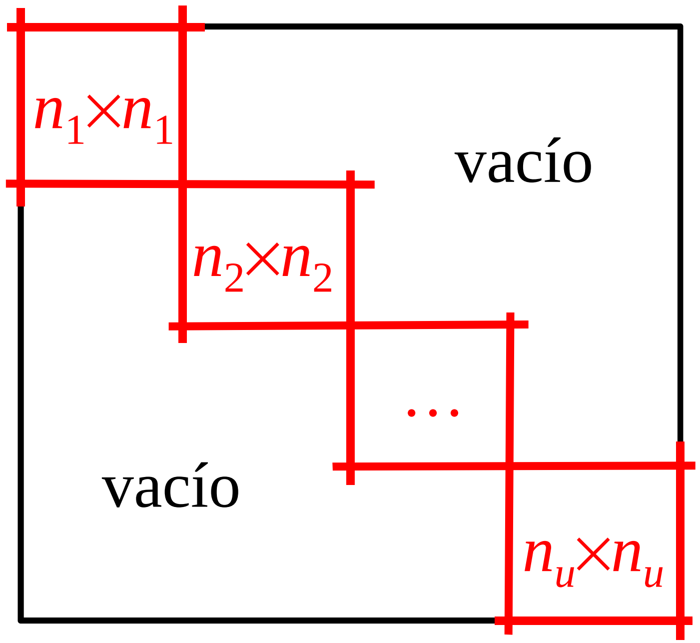
Cada ficha de dominó cubre dos filas y una columna si está puesta en vertical, o una fila y dos columnas si está puesta en horizontal.

Contando por filas, el número de veces que están cubiertas todas las filas es $nk$. Lo mismo para columnas. Si hay $d$ fichas de dominó, el número total de filas y columnas cubiertas por ellas es 3$d$. Luego $d$=2$nk$/3.

**Si $n$ es múltiplo de 3 podemos tomar $k$=1 y $d$=2$n$/3, y si no $k$=3 y $d$=2$n$**

# Contando dominós (III)

Podemos ahora dividir en $u^2$ subtableros y colocar dominós sólo en los de la diagonal principal. Cada fila contiene exactamente los dominós de la fila de su subtablero de la diagonal principal, y cada columna igual. Necesitamos ahora ver que esta división es siempre posible. Si $n$ es múltiplo de 3 nos basta tomar subtableros de lado 3.




Si $n$ no es múltiplo de 3, tenemos el problema resuelto para 4, 5, 7, 8
Para valores mayores de $n$ no múltiplos de 3, o $n$–4, o $n$–5, o $n$/2, es un no múltiplo de 3 para el que el problema está resuelto, y hemos terminado.

**Hemos resuelto el problema por combinación de doble conteo por casillas, filas y columnas y de subtableros**

# Contando por filas, columnas y diagonales (I)

Hallar todos los enteros positivos $n$ para los que en cada casilla de un tablero $n\times n$ se puede escribir una de las letras I, M y O de manera que:

- en cada fila y en cada columna cada letra aparece el mismo número de veces, y
- en cualquier línea diagonal compuesta por un número de casillas divisible por 3, cada letra aparece el mismo número de veces.

(Problema 2, IMO 2016)

Claramente $n$ es múltiplo de 3, y si dividimos el tablero en subtableros de tamaño 3×3, las diagonales compuestas por un número de casillas divisible entre 3, son concatenación de diagonales principales de subtableros 3×3.

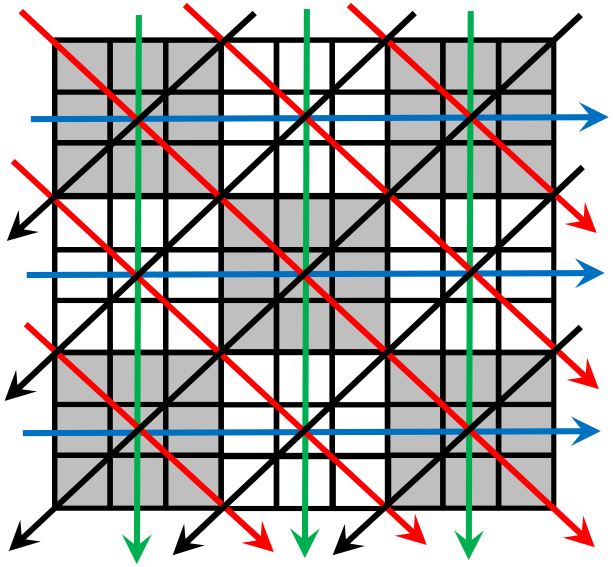
Para $n$=3 o $n$=6 parece no ser posible, pero para $n$=9 sí se puede como se muestra, con lo que para todo $n$ múltiplo de 9 se puede por división en subtableros de tamaño 9×9.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | M | O | M | O | I | O | I | M |
| I | M | O | M | O | I | O | I | M |
| I | M | O | M | O | I | O | I | M |
| O | I | M | I | M | O | M | O | I |
| O | I | M | I | M | O | M | O | I |
| O | I | M | I | M | O | M | O | I |
| M | O | I | O | I | M | I | M | O |
| M | O | I | O | I | M | I | M | O |
| M | O | I | O | I | M | I | M | O |

# Contando por filas, columnas y diagonales (II)

Parece entonces que $n$ ha de ser múltiplo de 9. Si esto es cierto, para terminar el problema falta "sólo" demostrar que el número de subtableros de tamaño 3×3 en que se divide el tablero, ha de ser a su vez múltiplo de 3.

Si $n=3u$, hay $9u^2$ casillas. Contamos las filas, columnas y diagonales que pasan por los centros de los $u^2$ subtableros 3×3. Cada casilla se cuenta exactamente una vez salvo las del centro de cada subtablero que se cuentan 4 veces.



Si $i$, $m$, $o$ es el número de subtableros que tienen en su centro I, M, O, entonces hemos contado $3u^2+3i$ I's, $3u^2+3m$ M's y $3u^2+3o$ O's. Pero estos tres números han de ser iguales porque lo son para cada fila, columna o diagonal sobre la que hemos contado, luego $u^2=i+m+o=3i=3m=3o$ es múltiplo de 3.

- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

# Agrupamos casillas en torno a reyes (I)

Se colocan 2500 reyes del juego de ajedrez en un tablero de tamaño 100×100, de forma que:

- ningún rey puede capturar a otro (es decir, no hay dos reyes colocados en casillas que compartan al menos un vértice), y
- cada fila y cada columna contiene exactamente 25 reyes.

Encuentra el número de tales colocaciones (dos colocaciones tales que una se pueda obtener de la otra por rotación o reflexión se consideran distintas). (Problema C3, IMO shortlist 2010)

Si dividimos el tablero en 2500 subtableros 2x2, cada tablero no puede contener más de un rey, luego ha de contener exactamente uno. Según la posición del rey dentro del subtablero, podemos decir que el subtablero es hacia arriba U o hacia abajo D, y hacia la derecha R o hacia la izquierda L.

Un subtablero U no puede estar debajo de uno D, ni uno R a la izquierda de uno L, y viceversa.

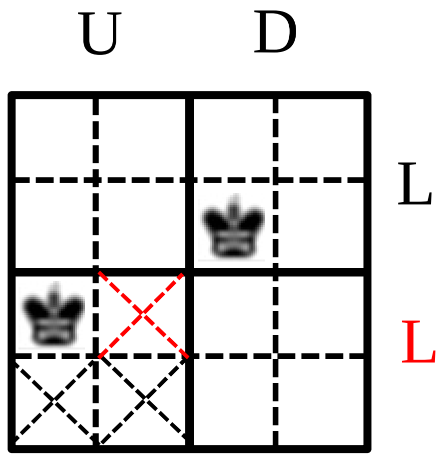
En cada banda vertical de subtableros hay tantos R como L, y en cada banda horizontal de subtableros hay tantos U como D.

# Agrupamos casillas en torno a reyes (II)

En la banda superior hay 25 subtableros D, luego por trivial inducción todos los tableros en sus 25 bandas verticales son D. De forma análoga, considerando la banda inferior, hay 25 bandas verticales U. Por el mismo razonamiento, hay 25 bandas horizontales L y 25 bandas horizontales R.

Sea una banda vertical D a la derecha de una banda vertical U. Sea la banda horizontal L de más arriba.

La casilla DL de la banda vertical D no puede tener en diagonal abajo y a la izquierda una casilla UR, luego esa casilla ha de ser UL, y la banda horizontal debajo de la considerada es L. Tras trivial inducción, tenemos al menos 26 bandas L, contradicción.



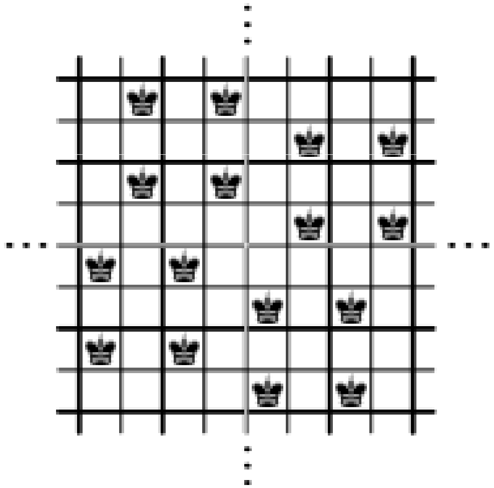

Luego si hay una banda vertical D a la derecha de una banda vertical U, la mitad inferior del tablero son bandas L, y la mitad superior son bandas R.

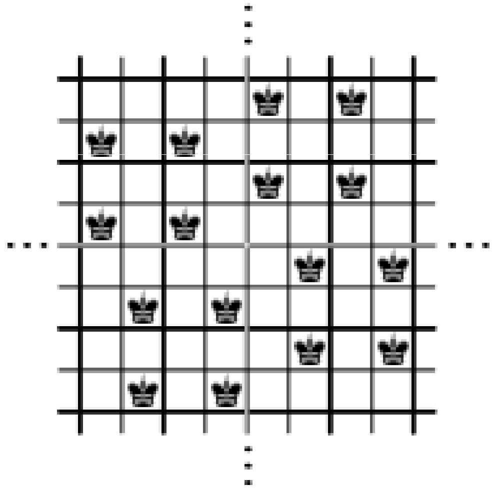
# Agrupamos casillas en torno a reyes (III)

Opción 1: las bandas verticales D ocupan la mitad izquierda del tablero. Por un razonamiento análogo al anterior, las bandas horizontales R ocupan la mitad inferior del tablero.

Opción 2: las bandas horizontales L ocupan la mitad inferior del tablero, y por razonamiento análogo, las bandas verticales U ocupan la mitad izquierda del tablero.

Luego hay exactamente dos posibles formas de colocar los reyes, que son como siguen:

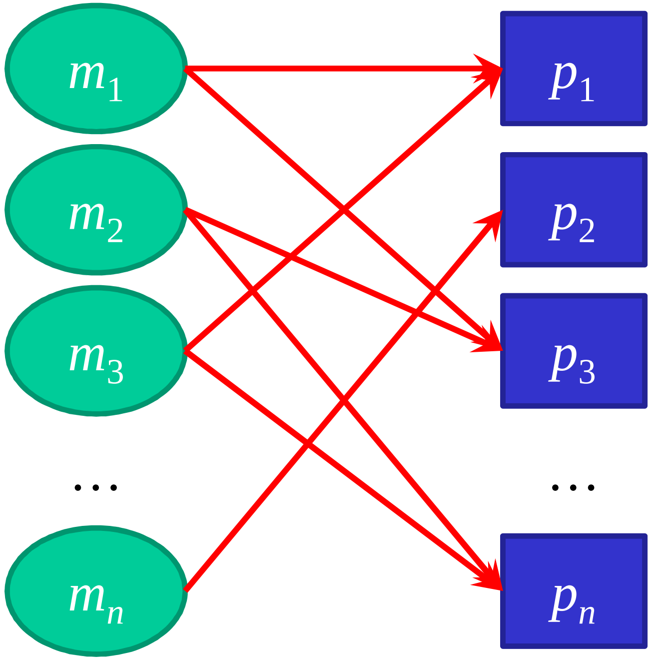




**Hemos resuelto el problema agrupando las casillas en subtableros 2x2, y luego razonando sobre los subtableros y bandas de subtableros, en lugar de sobre casillas, filas o columnas**

# Inciso: formas de emparejar – el teorema de Hall (I)

Disponemos de un conjunto $M$ de $n$ máquinas distintas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, y un conjunto $P$ de $n$ piezas distintas $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Para arreglar una máquina dada, basta con usar una pieza de repuesto, pero no todas valen, algunas sí y otras no. Las piezas que sirven para cada máquina no tienen por qué ser ni las mismas ni distintas. ¿Cuándo es posible arreglar todas las máquinas?




El teorema de Hall dice que si para cada subconjunto $S \in M$ de máquinas, el subconjunto $T \in P$ de piezas que sirven para esas máquinas, tiene un cardinal superior o igual al cardinal del subconjunto de máquinas, entonces es posible arreglarlas todas a la vez, asignando a cada máquina una pieza que es suficiente para arreglarla, y cada pieza a una máquina.

# Inciso: formas de emparejar – el teorema de Hall (II)

Demostración por inducción. Si $n$=1, el resultado es trivialmente cierto, hay una única máquina $m_1$, que se arregla con la única pieza de repuesto $p_1$.
Si el resultado es cierto para $n$=1,2,…,$N$, entonces consideremos $n$=$N$+1.

**Caso 1:** para cada subconjunto $S$ de máquinas, el conjunto $T$ de piezas que las pueden arreglar cumple $|T|>|S|$. Luego al ser enteros, $|T|\geq|S|+1$.
Elegimos una máquina cualquiera y le asignamos una de las piezas que sirve para arreglarla. Para cualquier subconjunto $S$ que no contenga a dicha máquina, consideramos el conjunto $T'$ resultante de quitarle a $T$ la pieza ya asignada (o $T'=T$ si la pieza asignada no está en $T$). Como $|T'|\geq|T|-1\geq|S|$, se cumple la condición del teorema para el conjunto de las restantes $N$ máquinas, y por hipótesis de inducción la asignación es posible.

# Inciso: formas de emparejar – el teorema de Hall (III)

**<u>Caso 2:</u>** hay un subconjunto $S$ de $M$ de exactamente $u<N+1$ máquinas que se pueden reparar con exactamente $u$ piezas. Al ser enteros, $u \leq N$. Por inducción podemos arreglar las $u$ máquinas con las $u$ piezas. Para cada subconjunto $S'$ de $v$ de entre las restantes $N+1-u$ máquinas, consideramos la unión de $S'$ y $S$, que tiene $u+v$ máquinas, luego las piezas que las reparan son al menos $u+v$ por condición del teorema. Quitando las $u$ piezas con las que hemos elegido reparar las $u$ máquinas de $S$, para todo subconjunto $S'$ de entre las restantes $N+1-u \leq N$ máquinas, nos quedan al menos $v$ piezas para reparar las $v$ máquinas de $S'$. Luego podemos aplicar la hipótesis de inducción a las restantes $N+1-u$ máquinas, y la asignación es posible.

**<u>El teorema de Hall nos da una condición sencilla para poder verificar si una asignación biunívoca es posible entre conjuntos del mismo cardinal. El desafío es determinar cuándo hay que usarlo, y a veces, establecer que la condición del teorema se cumple.</u>**

# Emparejamos fichas y casillas negras y blancas (I)

Un tablero de tamaño $2n \times 2n$ se pinta como si fuera de ajedrez. Se colocan en el centro de cada casilla fichas blancas y negras, de forma que haya exactamente $2n^2$ fichas de cada color. Se sabe que se pueden dividir las fichas en $2n^2$ parejas disjuntas, cada pareja de una ficha blanca y una ficha negra, de forma que la distancia entre las dos fichas de una pareja es a lo sumo $d$. Demuestra que partiendo de esta configuración, se pueden permutar todas las fichas de forma que

- cada casilla acabe estando ocupada por exactamente una ficha del mismo color que la casilla, y
- cada ficha se haya desplazado una distancia a lo sumo $d+1$.

(Versión simplificada del problema C5, IMO shortlist 2012)

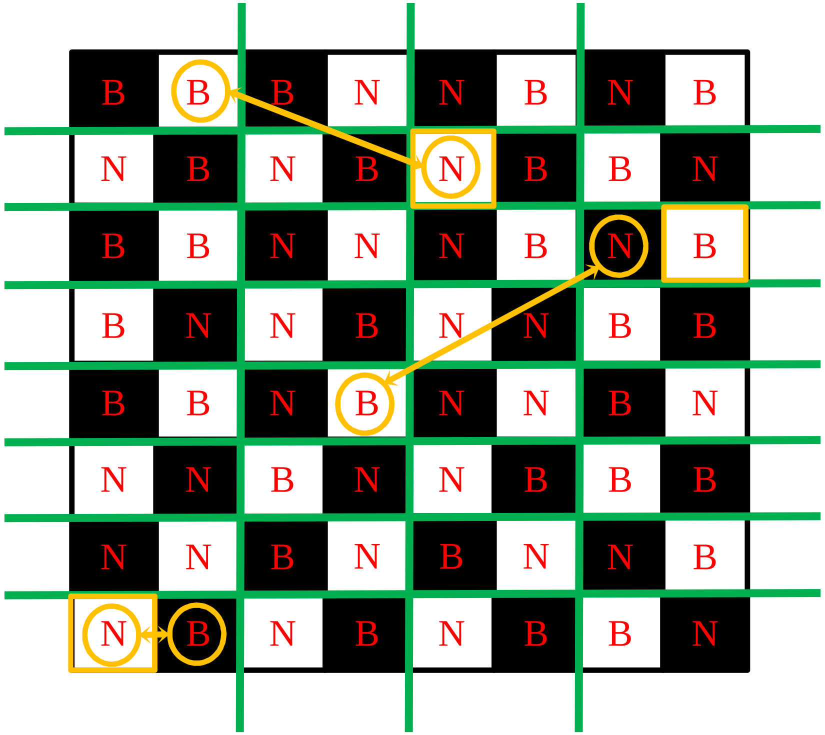
El problema parece ser emparejar fichas blancas con casillas blancas, de forma que se cumplan ciertas condiciones. Partimos de un emparejamiento entre fichas blancas y negras, así que el problema parece consistir en convertir este emparejamiento de fichas de distinto color, en emparejamiento de fichas y casillas de un mismo color. Basta con hacerlo para fichas y casillas blancas (análogo para las negras).

# Emparejamos fichas y casillas negras y blancas (II)

Particionamos el tablero en $2n^2$ subtableros $1\times 2$, de forma que en cada subtablero hay dos casillas, una blanca y una negra. Diremos que a cada ficha blanca (negra) *le gustan* dos casillas blancas (negras):

1) La del subtablero $1\times 2$ en la que se encuentra, y
2) La del subtablero $1\times 2$ en la que está la ficha negra (blanca) de su pareja.

Para cada ficha blanca, estas dos casillas que le gustan están, la primera a una distancia 0 o 1, y la segunda, o a una distancia *d*, o a una distancia 1 de una casilla que está a distancia *d*. Luego por la desigualdad triangular, ambas casillas que le gustan están a una distancia de a lo sumo $d$+1.



# Emparejamos fichas y casillas negras y blancas (III)

Para resolver el problema, nos basta con ver que a cada ficha blanca se le puede asignar biunívocamente una de las casillas blancas que le gustan. Comenzamos eliminando las fichas blancas para las que las dos casillas que le gustan son la misma, cosa que puede suceder si una ficha blanca está emparejada con una ficha negra en su mismo subtablero $1\times2$. Como hemos eliminado tantas casillas blancas como fichas blancas, nos basta con verificar que se cumplen las condiciones del teorema de Hall para las demás.

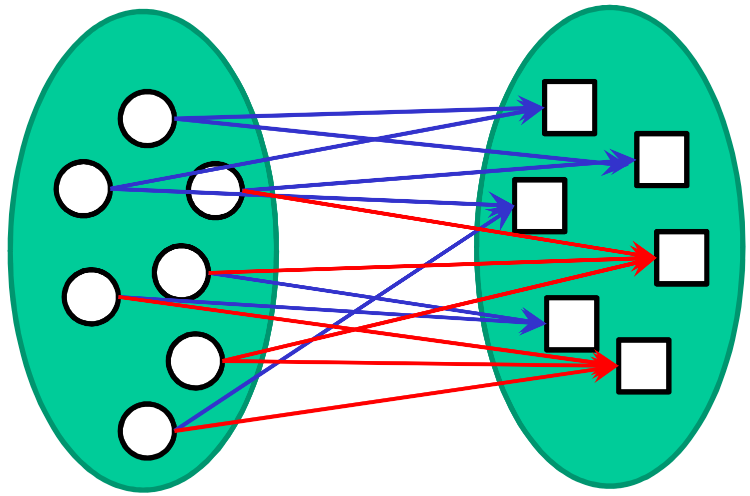
Para las demás fichas blancas, hay exactamente dos casillas blancas que le gustan. Contamos las flechas que unen las fichas blancas con las casillas blancas que les gustan, que son exactamente $2n$.

Pero cada casilla blanca gusta a exactamente dos fichas blancas:

- para cada ficha blanca que haya en el subtablero $1\times2$ que contiene a esta casilla, esa ficha blanca, y
- para cada ficha negra que haya en el subtablero $1\times2$ que contiene a esta casilla, la ficha blanca emparejada con dicha ficha negra.

# Emparejamos fichas y casillas negras y blancas (IV)

Luego si hubiera menos de *n* casillas blancas que gustan a *n* fichas blancas dadas, por el principio del palomar a alguna de ellas llegarían al menos 3 flechas, y gustaría a al menos 3 fichas, contradicción.



**<u>La combinación de particionar en subtableros, y usando el principio del palomar, ver que la asignación es posible mediante el teorema de Hall, resuelve el problema.</u>**

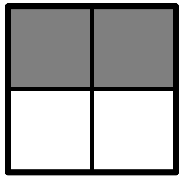
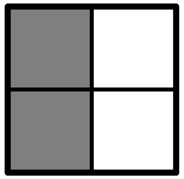
Nota: el problema original era con casillas y fichas de 3 colores, lo que dificulta algo más el establecer que se cumplen las condiciones para el teorema de Hall

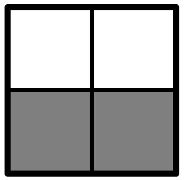
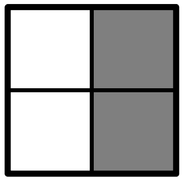
- Lugares comunes en problemas de tableros
- Coloreando casillas
- Contando casillas
- Agrupando casillas
- Recorriendo casillas

# Agrupamos casillas y recorremos fronteras (I)

Determina de cuántas maneras distintas se pueden colocar exactamente $n^2$ fichas de dominó en un tablero de ajedrez de tamaño $2n\times 2n$ de forma que cualquier cuadrado de $2\times 2$ contiene al menos dos cuadrados unitarios sin cubrir que están en la misma fila o en la misma columna.
(Problema 2, EGMO 2015)

Particionamos el tablero en $n^2$ subtableros $2\times 2$. En cada subtablero hay a lo sumo dos casillas ocupadas, para un total de a lo sumo $2n^2$ casillas ocupadas, que son exactamente las que cubren $n^2$ fichas de dominó. Luego cada subtablero tiene exactamente dos casillas ocupadas, que están en la misma fila o la misma columna, y por lo tanto hay cuatro tipos de subtableros $2\times 2$:

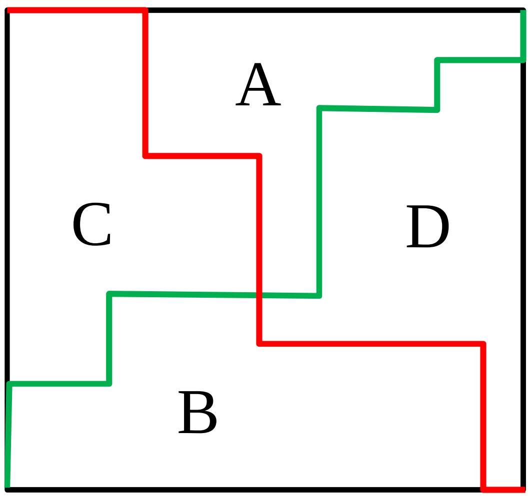
A  C 

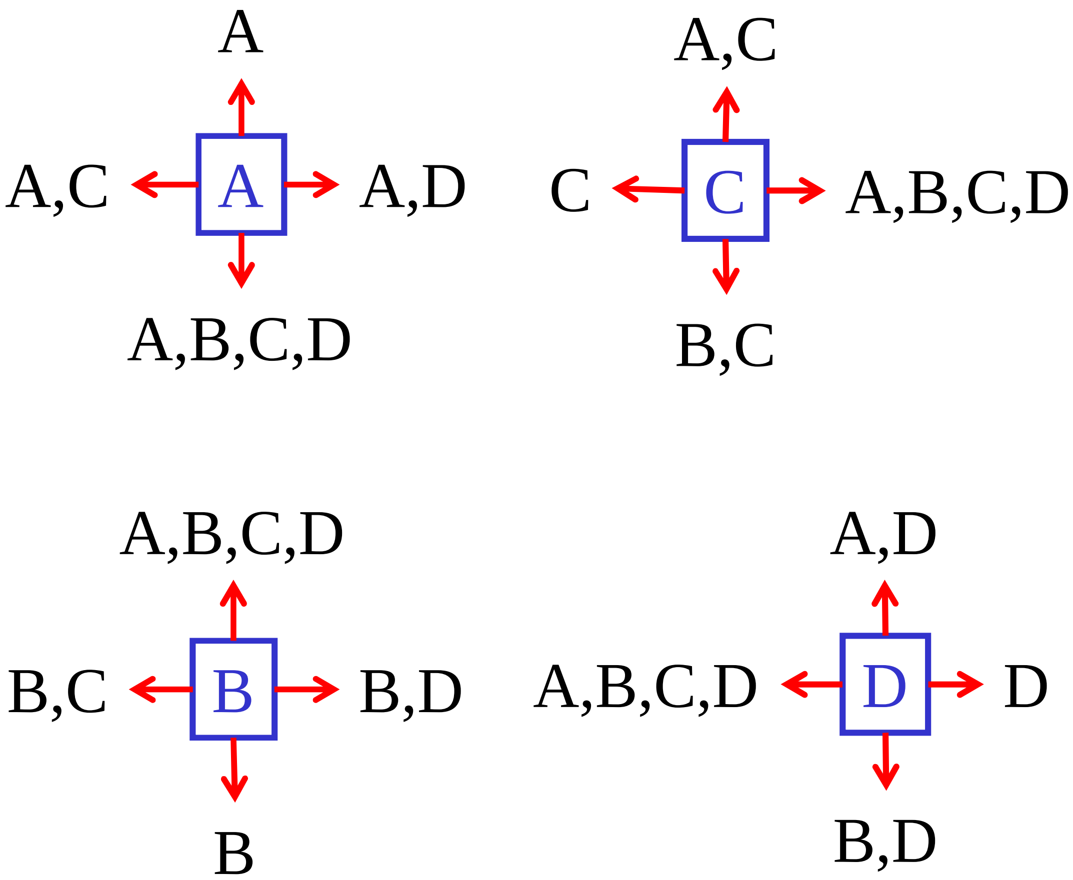
B  D 

Al poner juntos subtableros, vemos que a la derecha de un D sólo puede haber otro D, a la derecha de un B sólo puede haber otro B o un D, etc. Hay por lo tanto sólo ciertas combinaciones posibles, que se muestran a continuación.

# Agrupamos casillas y recorremos fronteras (II)

Pintemos de rojo las fronteras entre subtableros tales que uno es A o D, y el otro es B o C. Pintemos de verde las fronteras entre subtableros tales que uno es A o C, y el otro es B o D. Tenemos entonces que:



# Agrupamos casillas y recorremos fronteras (III)

Para cualquier recubrimiento bueno, las líneas roja y verde que hagan de frontera entre subtableros 2×2 van de izquierda a derecha, respectivamente de arriba abajo y de abajo arriba. Recíprocamente, para cualesquiera dos líneas roja y verde con estas trayectorias, asignando tipo a los subtableros encima de las 2, B a los subtableros debajo de las dos, C a los subtableros debajo de la roja y encima de la verde, y D a los subtableros encima de la roja y debajo de la verde, tenemos un recubrimiento bueno. Luego el problema es equivalente a contar el número de pares de líneas roja y verde.

Las líneas roja y verde son independientes. Además, cada una de ellas es un posible camino, sin variar de dirección, entre dos esquinas opuestas de un "mapa" $n \times n$ dividido en "manzanas" cuadradas 1×1. Luego el número buscado es

$$\binom{2n}{n}^2$$

**Hemos resuelto un problema de colocación de fichas convirtiéndolo en un problema de contar caminos (fronteras)**

# Un problema más compejo

Sea $n$ un entero positivo. Determinar el menor entero positivo $k$ que tenga la siguiente propiedad: se pueden pintar $k$ casillas en un tablero de tamaño $2n \times 2n$, de tal manera que exista exactamente una única forma de recubrir el tablero con fichas de dominó, cumpliéndose que ninguna de las fichas cubra dos casillas pintadas.
(Problema C8, IMO shortlist 2016)

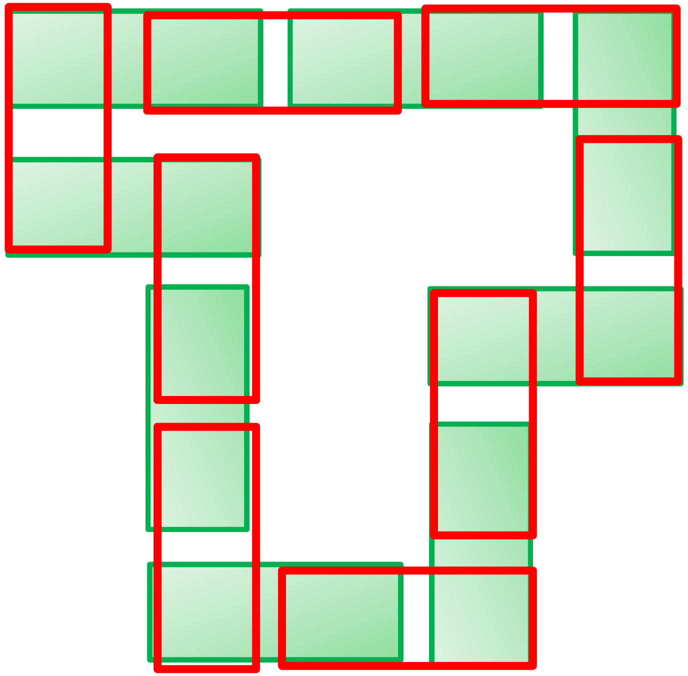
Este problema, como se puede imaginar por su origen, es más complejo que los precedentes. De haberse propuesto, hubiera sido probablemente el problema más complejo de la Olimpiada Internacional de 2016.

Estos problemas requieren bien de alguna idea realmente brillante, bien de un manejo apropiado de alguna técnica o resultado previo relativamente avanzados que puedan aplicarse en el caso que nos ocupa.

Antes de abordar el problema, veamos entonces un resultado interesante acerca de fichas de dominó en tableros que puede ayudar (mucho) a su resolución…

# Inciso – ciclos de dominós en tableros recubiertos (I)

Cuando disponemos varias fichas de dominó una detrás de otra, como en el juego (sin contar dobles, o colocándolas como fichas no dobles), podemos formar ciclos con ellas.

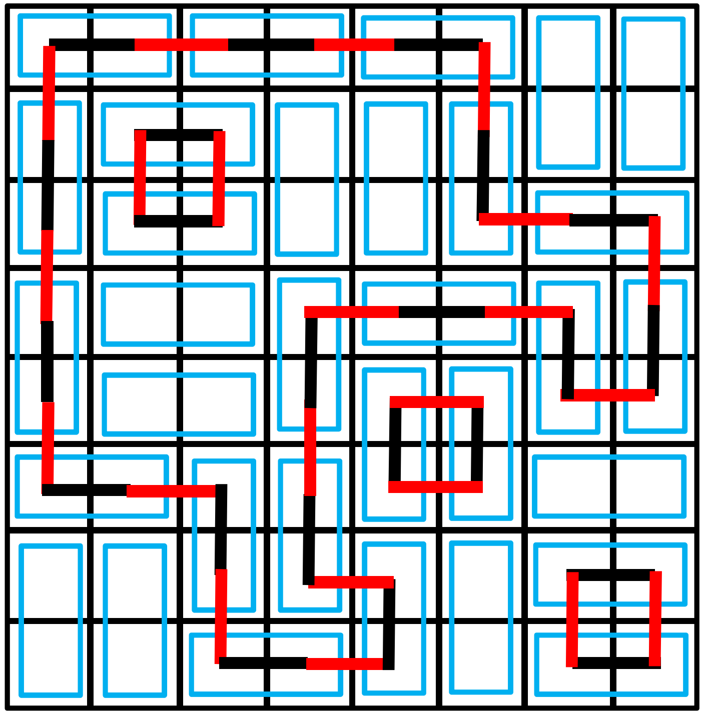


Una de las ventajas que tienen estos ciclos, es que intercambiando fronteras entre dos fichas distintas, y divisorias en el medio de fichas, se puede alterar dónde están las fichas, sin cambiar el espacio que ocupa el ciclo.

El resultado que utilizaremos, y que demostraremos a continuación, es el siguiente:
Dado un tablero $2n\times 2n$, recubierto completamente por $2n^2$ fichas de dominó, sin solapamientos y sin dejar huecos, existen al menos $n$ ciclos disjuntos que se pueden formar con las fichas que recubren el tablero.

# Inciso – ciclos de dominós en tableros recubiertos (II)

Tomemos una casilla de la diagonal principal, cubierta por una ficha de dominó. Tracemos una línea negra entre los centros de las dos casillas recubiertas por esta ficha, y una línea roja entre los centros de las dos casillas simétricas respecto de la diagonal principal.



Continuemos de esta forma hasta que, antes o después por ser finito el número de casillas, volvemos a una casilla de la diagonal.

Hemos generado así un ciclo, simétrico respecto de la diagonal principal, y que contiene exactamente dos casillas de la diagonal.

Repitiendo el proceso partiendo del resto de casillas de la diagonal principal que no hayan sido todavía parte de ningún ciclo, generamos $n$ ciclos, cada uno de los cuales contiene exactamente 2 de las $2n$ casillas de la diagonal principal.

# Recorremos ciclos de dominós en tableros (I)

Sea $n$ un entero positivo. Determinar el menor entero positivo $k$ que tenga la siguiente propiedad: se pueden pintar $k$ casillas en un tablero de tamaño $2n \times 2n$, de tal manera que exista exactamente una única forma de recubrir el tablero con fichas de dominó, cumpliéndose que ninguna de las fichas cubra dos casillas pintadas.
(Problema C8, IMO shortlist 2016)

Por el resultado anterior, hay al menos $n$ ciclos distintos de fichas de dominó concatenadas. Si hay a lo sumo $2n-1$ casillas pintadas, hay por el principio del palomar al menos un ciclo en el que hay pintada a lo sumo una casilla.

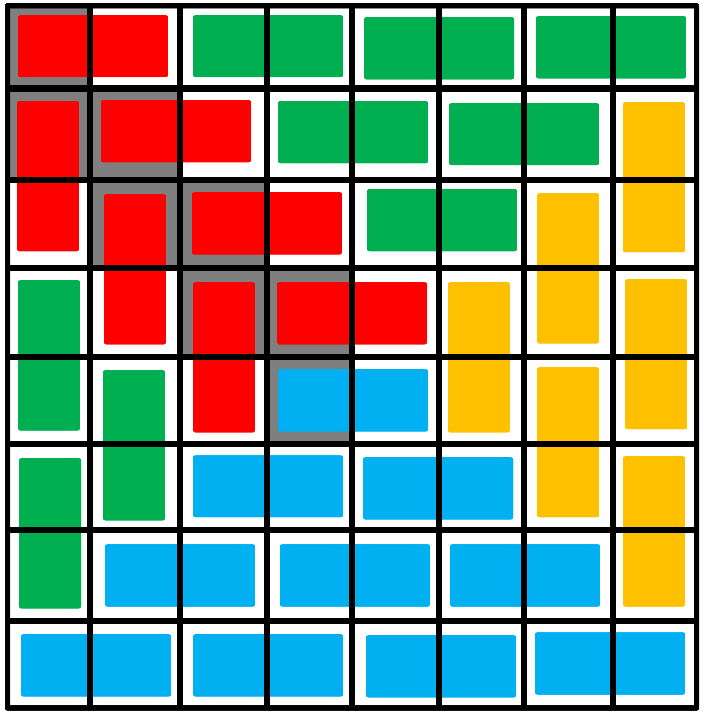
Podemos entonces cambiar las fichas dentro de ese ciclo, de forma que dada una ficha, ésta se convierta en dos medias fichas, siendo las otras dos mitades de estas fichas, las mitades de las fichas anterior y posterior a la ficha dada. Luego el recubrimiento no puede existir y ser único pintando menos de $2n$ casillas.

# Recorremos ciclos de dominós en tableros (II)

Pintando $2n$ casillas, sí es posible forzar que la colocación de dominós sea única, por ejemplo para $n$=4 en la figura.

Pintamos primero las $2n$ casillas, ocupando media diagonal, y las casillas inmediatamente inferiores a las de esta media diagonal.  Esto fuerza a que se coloquen de forma única las fichas rojas.

A su vez, las fichas rojas fuerzan la colocación de las fichas verdes.



Finalmente, estas fichas que recubren ya la mitad del tablero, fuerzan a las restantes.

**Un resultado sobre ciclos de casillas demostrado por simetrías, nos permite resolver un problema acerca de colocación de fichas**