

V Torneo Matemático Triangular
Aragón – La Rioja – Navarra
Tudela, 3 de marzo de 2018

Algunas estrategias para la resolución
de problemas dinámicos

Daniel Lasasa Medarde

Índice

- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

Taxonomía de problemas dinámicos (I)

Podemos decir que un problema es **dinámico** cuando refleja una **situación que cambia**

El cambio suele poder **indexarse mediante un entero**, tal como el **número de turnos** transcurridos en un juego, o la **posición** en una sucesión

El problema refleja entonces una **sucesión de “situaciones” o “estados”**, pasándose de un estado al siguiente con cada variación del índice

Los cambios pueden ser **determinísticos** (p.ej. dados mediante una fórmula en una sucesión, o una regla de transformación que se aplica siempre), **sujetos a elección** (p.ej. reflejando diferentes elecciones o posibles movimientos disponibles en un juego) o **aleatorios**

Cuando los cambios están sujetos a elección, pueden depender de la decisión de una única persona o de varias

Taxonomía de problemas dinámicos (II)



- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

Invariantes

Un **invariante** es una **cantidad, situación, condición**, etc. que **permanece constante** a lo largo del progreso del problema dinámico

Los invariantes, cuando existen, constituyen un “asidero”, algo a lo que agarrarse y que sabemos que **va a ser así permanentemente**, con lo que una vez demostrado que algo es un invariante (o **puede elegirse** que sea invariante) podemos **darlo como cierto** en todo momento del problema, y como **punto de partida** en todo cambio de una situación o un estado al siguiente

El desafío es encontrar invariantes útiles en la resolución del problema que nos ocupa

Primeros ejemplos sencillos (I)

Se escriben en la pizarra los números $1, 2, 3, \dots, 2n$, donde n es un entero positivo. En cada turno, debes elegir dos enteros a y b de los que estén escritos en ese momento de la pizarra, borrarlos, y escribir en su lugar el entero $|a-b|$, hasta que quede un solo número en la pizarra. ¿Puedes conseguir que al final quede en la pizarra sólo el número 0?

Caso 1: Si n es par, nos basta con tomar en cada turno $2k-1$ y $2k$, borrarlos y sustituirlos por 1, hasta que queden n unos. Los eliminamos luego por parejas hasta que queden $n/2$ ceros, que eliminamos entre sí.

Caso 2: Si n es impar, la suma de elementos de la pizarra es inicialmente $n(2n+1)$, impar. Si en un cierto paso elegimos a y $b < a$, la suma de los enteros de la pizarra se reduce en $a+b-(a-b)=2b$. Luego **la suma de los enteros en la pizarra será siempre impar (invariante)**, y el último número que quede será siempre impar, distinto de 0.

Primeros ejemplos sencillos (II)

En los vértices de un hexágono regular se colocan, en este orden, los números 1,0,1,0,0,0. En cada turno, se pueden elegir dos vértices consecutivos cualesquiera, y añadirles 1. ¿Es posible conseguir que al final cada vértice tenga el mismo número?

Al probar, enseguida vemos que la respuesta parece ser NO

Para demostrar que no es posible, nos puede ayudar un invariante. Uno que en este caso funciona es la cantidad $x-y+z-u+v-w$, donde x, y, z, u, v, w son los números de los 6 vértices en ese orden. Inicialmente **vale 2, no varía en cada turno**, y si todos los vértices tuvieran el mismo número **tendría que valer 0**, cosa que es imposible.

Un invariante no numérico (I)

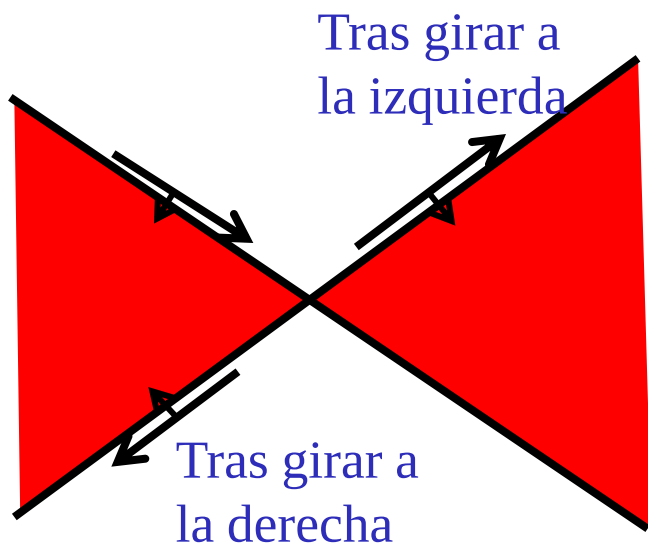
Se consideran 2017 rectas en el plano tales que no hay tres de ellas que pasen por el mismo punto. La hormiga Turbo se coloca en un punto de una recta (distinto de los puntos de intersección) y empieza a moverse sobre las rectas de la siguiente manera: se mueve en la recta en la que está hasta que llega al primer punto de intersección, ahí cambia de recta torciendo a la izquierda o a la derecha, alternando la elección en cada intersección a la que llega. Turbo sólo puede cambiar de dirección en los puntos de intersección. ¿Puede existir un segmento de recta por el cual la hormiga viaje en ambos sentidos?

Observación: Una forma de resolver este problema podría ser buscar un **invariante** relacionado con el **sentido de recorrido** de los segmentos

Si lo encontramos, habremos terminado y la respuesta será NO

Un invariante no numérico (II)

Podemos colorear el plano con 2 colores de forma que regiones adyacentes tengan distinto color, y entonces Turbo siempre tiene el mismo color a su derecha, luego sólo puede recorrer cada segmento en un sentido:



Nota 1: En esta solución es irrelevante hacia qué lado gira Turbo

Nota 2: Este problema se propuso como problema 3 en la EGMO de 2017

- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

Variaciones monótonas

Podemos encontrar en problemas dinámicos **cantidades que siempre cambian en el mismo sentido** (o que podemos elegir que siempre cambien así), siempre creciendo o siempre decreciendo

Si existe algún **límite** del que no puedan pasar, o algún **valor crítico** para el que suceda algo al alcanzarse, una variación monótona hacia ese límite o valor crítico puede ser útil, especialmente si **la cantidad que varía es un entero**

El desafío, como antes es encontrar una cantidad que varíe monótonamente y tal que este hecho sea útil en la resolución del problema que nos ocupa

Un ejemplo no tan sencillo (I)

Cada vértice de un pentágono regular tiene asignado un entero, que en el orden de las agujas del reloj, son x, y, z, u, v . Los enteros pueden ser positivos, negativos o nulos, pero la suma s de los cinco es inicialmente positiva. En cada momento en que al menos uno de los cinco enteros sea negativo, elegimos uno de los enteros negativos (por ejemplo y), y cambiamos éste, su anterior y su posterior, de forma que en lugar de (x, y, z) , pasemos a tener $(x+y, -y, y+z)$, en este orden. Demostrar que el proceso necesariamente termina, es decir que siempre llega un momento en el que los cinco enteros son todos no negativos.

Observación 1: Al ser $(x+y)+(-y)+(y+z)=x+y+z$, **la suma de los cinco enteros es un invariante**, pero esto no parece ayudar mucho.

Observación 2: Como tenemos que demostrar que el proceso termina, lo que necesitamos es una **cantidad que varíe monótonamente** hasta algún **límite imposible** o algún **valor crítico**

Un ejemplo no tan sencillo (II)

Una opción es definir la siguiente cantidad, que es siempre necesariamente no negativa:

$$\begin{aligned}
 &|x + y + z + u| + |y + z + u + v| + |z + u + v + x| + |u + v + x + y| + |v + x + y + z| \\
 &+ |x + y + z| + |y + z + u| + |z + u + v| + |u + v + x| + |v + x + y| \\
 &+ |x + y| + |y + z| + |z + u| + |u + v| + |v + x| + |x| + |y| + |z| + |u| + |v|
 \end{aligned}$$

Al cambiar (x, y, z) por $(x+y, -y, y+z)$, las cantidades pasan a ser:

$$\begin{aligned}
 &|x + y + z + u| + |z + u + v| + |z + u + v + x + 2y| + |u + v + x| + |v + x + y + z| \\
 &+ |x + y + z| + |z + u| + |y + z + u + v| + |u + v + x + y| + |v + x| \\
 &+ |x| + |z| + |y + z + u| + |u + v| + |v + x + y| + |x + y| + |y| + |y + z| + |u| + |v|
 \end{aligned}$$

Un ejemplo no tan sencillo (III)

Se tiene entonces que la cantidad antes de un cambio, menos la cantidad después del cambio, es

$$|z + u + v + x| - |z + u + v + x + 2y| = |s - y| - |s + y| = s + |y| - |s - |y||,$$

que toma el valor mínimo de entre $2s$ y $2|y|$

En cualquier caso, la cantidad **decrece como mínimo 2 en cada cambio, es siempre no negativa**, e inicialmente toma un valor finito. Luego tras un número finito de cambios (a lo sumo igual a la mitad del valor inicial de la cantidad, más uno) se haría negativa. Esto es imposible, y el proceso debe terminar necesariamente antes

Nota: Este problema se propuso como problema 3 en la IMO de 1985, con la dificultad añadida de que se preguntaba si el proceso terminaba o no. Fue el problema más difícil de esa IMO y “creó escuela” sobre monotonía

...y los invariantes o variaciones monótonas útiles no son únicos!!!

Se puede también resolver este problema considerando la siguiente cantidad:

$$(x-z)^2 + (y-u)^2 + (z-v)^2 + (u-x)^2 + (v-y)^2,$$

que tras el cambio pasa a tomar el valor

$$(x-z)^2 + (y+u)^2 + (y+z-v)^2 + (u-x-y)^2 + (v+y)^2,$$

y la diferencia entre el valor antes y el valor después del cambio es

$$-2(x+y+z+u+v)y = -2sy = 2s|y| \geq 2$$

Nuevamente, hemos hallado una **cantidad entera no negativa que decrece como mínimo 2 en cada cambio**, e inicialmente toma un valor finito, luego sólo se puede dar un número finito de cambios

- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

Puntos críticos (I)

Hay 15 vasijas, cada una con capacidad de 15 litros, inicialmente todas vacías, y botellas con capacidades de 1, 2, 3 y 4 litros. Dos jugadores, A y B, juegan un juego en turnos alternos. En cada turno, el jugador elige una botella y una vasija, llena la botella del todo en una fuente cercana, y vacía su contenido en la vasija. Empieza jugando A, y gana el jugador que consigue en su turno que todas las vasijas queden llenas.

(i) ¿Cuál de los dos jugadores tiene estrategia ganadora, y cuál es esa estrategia?

(ii) Si hubiera 15 vasijas, pero cada una tuviera 16 litros, ¿qué jugador tendría estrategia ganadora, y cuál sería esa estrategia?

Observación: ¿Hay algún invariante? Es decir, dado lo que haya jugado uno de los dos contrincantes, ¿puede el otro **asegurar siempre mantener constante** alguna característica de la situación?

Puntos críticos (II)

(i) Si un jugador vierte l litros en una vasija, su contrincante puede verter siempre $5-l$ litros en esa misma vasija, luego un jugador puede elegir jugar de forma que lo que queda sin llenar en una vasija sea **constante módulo 5 (invariante)**

Como la situación inicial y la final son ambas resto 0 módulo 5 en cada vasija, el segundo jugador tiene estrategia ganadora, y es la antes descrita. Con esta estrategia, en 3 turnos por vasija, o 45 turnos en total (de cada jugador), **el juego termina y el segundo jugador gana**

(ii) En este caso, el invariante módulo 5 puede ser usado por el jugador que tenga estrategia ganadora (luego veremos qué jugador es)

Puntos críticos (III)

Un jugador puede elegir “**encarrilar**” una vasija que no esté encarrilada (hacer que quede por llenar una cantidad que sea múltiplo de 5 cuando antes no era múltiplo de 5), o hacer otra jugada

Si un jugador encarrila una vasija, su contrincante puede encarrilar otra, haciendo que **permanezca constante la paridad** del número de vasijas que no estén encarriladas (**invariante**)

Si un jugador no encarrila una vasija que no estaba encarrilada, quedaba más de 1 litro en esa vasija, luego quedaban 6, 11 o 16, y su contrincante puede jugar para que queden respectivamente 1, 6 u 11

La solución final tiene 0 vasijas sin encarrilar, luego **el primer jugador gana encarrilando una vasija** en su primer turno

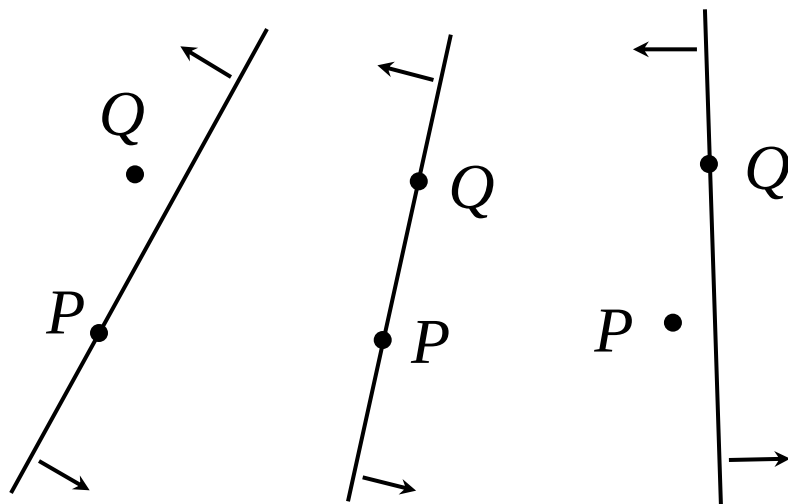
Invariantes geométricos (I)

Sea S un conjunto finito de dos o más puntos del plano. En S no hay tres puntos colineales. Un remolino es un proceso que empieza con una recta l que pasa por un único punto P de S . Se rota l en el sentido de las agujas del reloj con centro P hasta que la recta encuentre por primera vez otro punto de S , al cuál llamaremos Q . Con Q como nuevo centro se sigue rotando la recta hasta encontrar otro punto de S , y este proceso continúa indefinidamente.

Demostrar que se puede elegir un punto P de S y una recta l que pasa por P tales que el remolino que resulta usa cada punto de S como centro de rotación un número infinito de veces.

Observación: ¿Hay algún invariante? ¿Qué **permanece constante** cada vez que **cambio de centro de rotación**?

Invariantes geométricos (II)



El número de puntos que hay **a cada lado de la recta** permanece constante entre antes y después del **cambio de centro de rotación (invariante)**

Tomada una recta que pasa por un punto P y deja los $n-1$ restantes a uno de ambos lados, si a un lado deja m , al otro deja $n-1-m$. Al rotar con centro P , varía el número de puntos a cada lado de uno en uno. Tras rotar 180° , en el lado que antes había m puntos, ahora hay $n-1-m$ y viceversa. Luego para cada P hay una posición de la recta que deja exactamente $[(n-1)/2]$ puntos a un lado y ninguna otra paralela igual. Elegido este invariante, la recta pasa cada vuelta por cada uno de los puntos P .

Nota: Este problema se propuso como problema 2 en la IMO de 2011

Cuando dos jugadores no quieren lo mismo (I)

Cinco cubos idénticos de l litros de capacidad cada uno están situados en los vértices de un pentágono regular. Cenicienta y su malvada madrastra realizan las siguientes jugadas por turnos: al principio de cada turno, la madrastra coge un litro de agua del río cercano y lo distribuye arbitrariamente entre los cinco cubos; luego Cenicienta elige dos cubos vecinos y los vacía en el río; después se pasa al siguiente turno y se repite el proceso. La malvada madrastra quiere que al menos un cubo se sobre, y Cenicienta quiere que esto no suceda. ¿Para qué valores de l tiene cada una de ellas estrategia ganadora?

Observación 1: Cenicienta ha de buscar un **invariante** tras cada turno suyo que mantenga una situación desde la que la madrastra no gane

Observación 2: A la madrastra le basta con que dos cubos no contiguos tengan más de $l-1$ litros tras un turno suyo, o que todos los cubos tengan más de $l-1,5$ litros tras un turno suyo

Cuando dos jugadores no quieren lo mismo (II)

En una primera fase, la madrastra usa su litro de agua para **dejar todos los cubos al mismo nivel**. Cada cubo contendrá en todo momento menos de 0,5 litros, luego Cenicienta vaciará menos de 1 litro, y la cantidad total de agua subirá acercándose asintóticamente a 0,5 litros en cada cubo.

Si x_n es la cantidad de agua en cada cubo al final del turno n de la madrastra,

$$5x_{n+1} = 3x_n + 1, \quad x_1 = \frac{1}{5}, \quad x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5} \right)^n,$$

que la madrastra puede hacer tan cercano a $\frac{1}{2}$ como quiera.

Luego **la madrastra gana si $l < 2$** .

Si $l \geq 2$, Cenicienta puede elegir como **invariante** el que de los tres cubos no vacíos que queden tras cada turno suyo, **el central contenga menos de 1 litro**, y los dos laterales contengan **entre ambos menos de 1 litro**.

Cuando dos jugadores no quieren lo mismo (III)

Tras jugar la madrastra, numeramos los cubos:

1 y 2: los que Cenicienta había dejado vacíos

4: el central que Cenicienta no había vaciado

5: de los dos laterales, el que tiene menos tras jugar la madrastra (<1 litro)

- Si el cubo 4 tiene <1 litro y los cubos 3 y 5 suman <1 litro, Cenicienta vacía los cubos 1 y 2
- En cualquier otro caso, Cenicienta vacía los cubos 3 y 4, salvo que...
- El cubo 1 siempre tendrá <1 litro, luego el único caso no cubierto hasta ahora es que 2 y 5 sumen 1 litro o más. Pero entonces, como 1, 2, 3 y 5 suman menos de 2 litros, se tiene que 1 y 3 suman menos de 1 litro, y 2 tiene menos de 1 litro, y Cenicienta vacía los cubos 4 y 5

Luego **Cenicienta gana si $l \geq 2$.**

Nota: Este problema estaba en la lista corta de problemas preseleccionados para la IMO de 2009.

- Taxonomía de problemas dinámicos
- Invariantes
- Variaciones monótonas
- Ejemplos
- “Fuentes” y “sumideros”

Fuentes y sumideros

Cuando el problema pueda pasar por diferentes situaciones o estados, puede ser interesante observar qué **transiciones posibles** hay entre unos estados y otros, y más específicamente de qué estados **se puede salir**, pero **no se puede llegar** a ellos (**fuentes**) y a qué estados **se puede llegar**, pero **no se puede ir de ellos a ningún otro** (sumideros)

La presencia de **sumideros** puede ser utilizada para demostrar que un cierto **proceso termina**, si se garantiza llegar siempre a uno de ellos

La comparación entre **número de fuentes y de sumideros**, y formas de llegar de unos a otros, puede también ser de utilidad

El desafío, una vez más, es identificar si existen fuentes y sumideros, y cuál es su utilidad (si la tienen)

Problemas que engañan ¿Hay realmente elección? (I)

Tenemos 2009 cartas, que son doradas por un lado y negras por el otro, puestas en fila a lo largo de una mesa. Inicialmente, todas las cartas tienen el lado dorado hacia arriba. Dos jugadores, situados en el mismo lado de la mesa, juegan alternativamente de la siguiente forma: el jugador que tiene el turno elige un bloque de 50 cartas consecutivas, tal que la primera carta (la de más a la izquierda) de dicho bloque tenga su lado dorado hacia arriba, y les da la vuelta a las 50. El ganador es el último jugador que puede realizar una jugada válida.

(a) ¿Concluye necesariamente el juego?

(b) ¿Tiene alguno de los dos jugadores estrategia ganadora?

Observación 1: ¿Cuál es el resultado neto de elegir dos veces el mismo bloque de 50 cartas consecutivas? ¡**NINGUNO!**

Observación 2: Especialmente **para la parte (a)**, ¿existe algún estado o alguna situación que pueda ser considerado como **sumidero**?

Problemas que engañan ¿Hay realmente elección? (II)

(a) Una vez elegido por vez primera el bloque formado por las 50 primeras cartas, la primera carta tiene siempre el lado negro hacia arriba (**sumidero** en el sentido de que **no se puede “volver atrás”**)

Inducción sobre el número de cartas en la mesa: si hay menos de 50, el juego acaba antes de empezar, y si hay 50, acaba tras el único movimiento válido. Si el juego termina para N o menos cartas, y tenemos $N+1$ cartas, entonces:

- 1) El bloque formado por las 50 primeras cartas no se elige nunca, con lo que la situación es equivalente a jugar sólo con N cartas,
- 2) En cuanto el bloque formado por las 50 primeras cartas se elija una vez, no puede volver a elegirse, y es como jugar con N cartas

Luego **el juego siempre acaba**

Problemas que engañan ¿Hay realmente elección? (III)

(b) Cuando el juego termina, tienen que tener el **lado negro** hacia arriba las cartas **1,2,3,...,1960**

Para la carta 1, ha sido elegido bloque formado por las **50 primeras cartas un número impar de veces**, pero los bloques que empiezan en las cartas **2,3,4,...,50** han sido elegidos **un número par de veces**

Los bloques elegidos un número impar de veces son exactamente los que empiezan por las cartas 1,51,101,...,1951, es decir un número par de ellos. Luego **el juego acaba tras un número par de jugadas**

Gana siempre el segundo jugador, ¡independientemente de cómo se juegue!

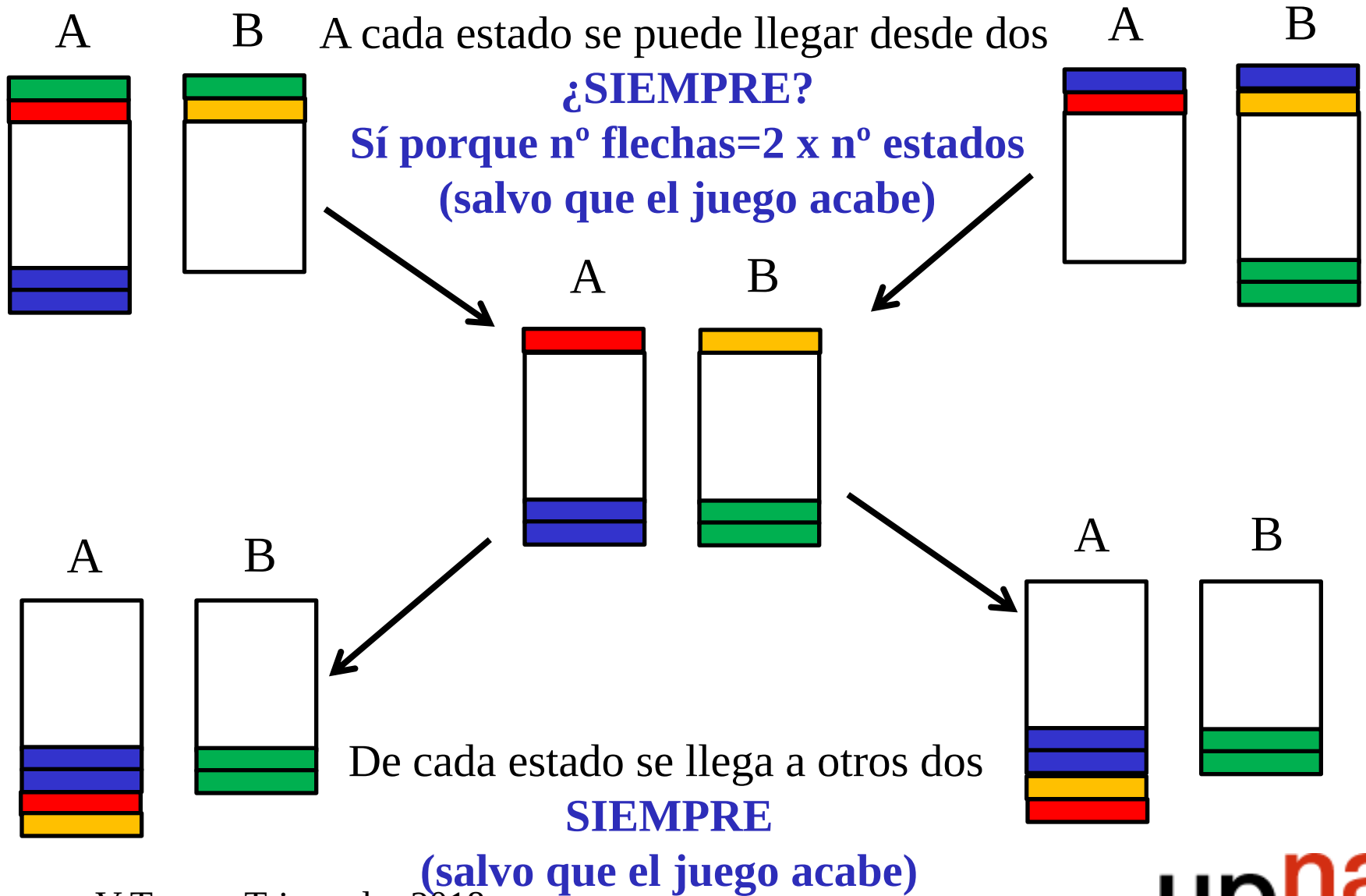
Nota: Este problema estaba en la lista corta de problemas preseleccionados para la IMO de 2009.

Contando transiciones entre estados (I)

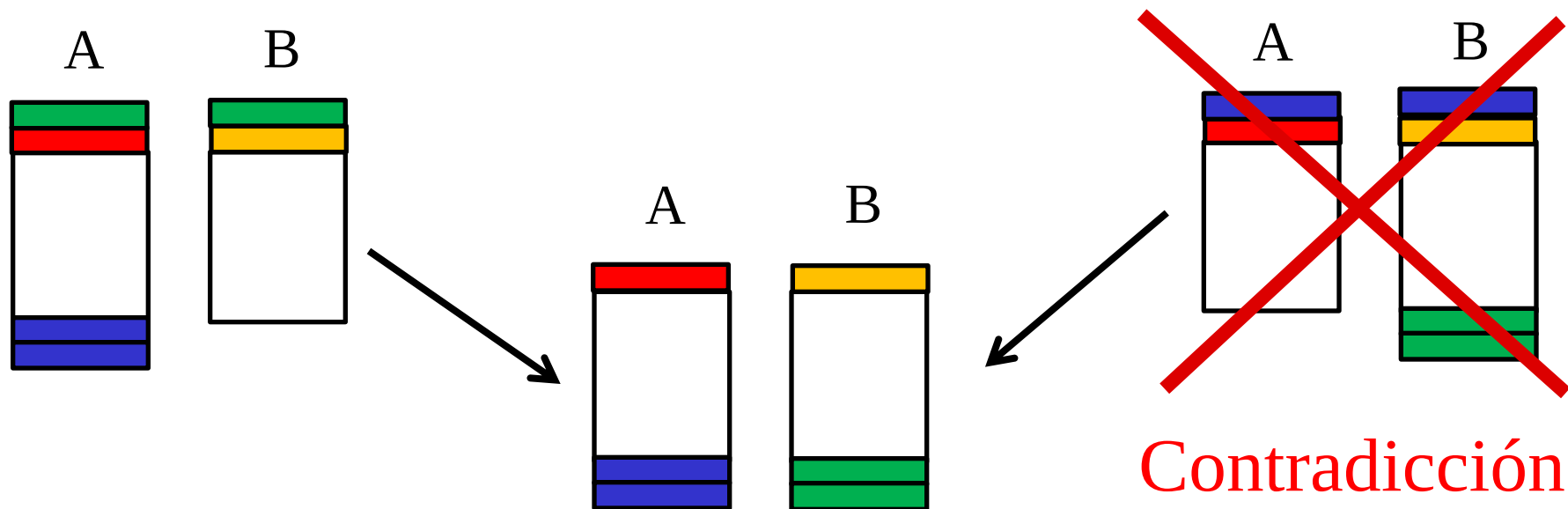
Dos jugadores juegan a un juego con una baraja de N cartas. Para cada dos cartas, hay una de ellas que gana a la otra. Todas las cartas se reparten al azar entre ambos jugadores (no necesariamente en mismo número para ambos), y cada uno de ellos ordena las que tiene de forma aleatoria en un mazo, con las cartas boca abajo. En cada turno, cada jugador saca la carta superior de su mazo y le da la vuelta. El jugador que haya sacado la carta que gana a la otra recibe las dos cartas, ordena estas dos cartas a su elección, y las coloca las dos últimas (más abajo) en el mazo. El juego termina cuando un jugador consigue tener todas las cartas. Demuestra que, independientemente de cómo se repartan las cartas y cómo las ordene cada uno, los dos jugadores pueden ponerse de acuerdo en una estrategia para conseguir que el juego termine.

Observación: Si llamamos estado a la disposición de todas las cartas en dos mazos, uno para cada jugador, ¿desde cuántos estados se llega a uno dado, y hacia cuántos estados se puede llegar a él, en un turno?

Contando transiciones entre estados (II)



Contando transiciones entre estados (III)



Elijamos, de todos los accesibles desde el estado inicial, el estado en el que A dispone de un número minimal de cartas, es decir, no hay ningún otro estado accesible desde el inicial en el que A tenga menos cartas

Existe un estado desde el que no se puede llegar a otros (final de partida) accesible desde el estado inicial

Variaciones monótonas de mayor complejidad (I)

Para cualquier entero $n \geq 2$ calculamos el entero $h(n)$ a partir de la representación decimal de n , de la siguiente manera, y siendo r la cifra de las unidades de n :

- (1) Si $r=0$, la representación decimal de $h(n)$ es el resultado de eliminar de la representación decimal de n el 0 de las unidades. Ej., si $n=149710$, entonces $h(n)=14971$.
- (2) Si $1 \leq r \leq 9$, dividimos la representación decimal de n en dos partes, de forma que sea LR , tal que R tenga longitud máxima de todas las posibles cadenas tales que r sea su cifra mínima, y L sea bien la cadena vacía, bien una cadena tal que su última cifra sea estrictamente menor que r . La representación decimal de $h(n)$ es entonces la representación decimal de L , seguida de dos copias de la representación decimal de $R-1$. Así, si $n=14971$, $R=14971$, L es la cadena vacía, y $h(n)=1497014970$, mientras que si $n=84975$, $R=975$, $L=84$, y $h(n)=84974974$.

Demuestra que empezando desde cualquier entero positivo n , la secuencia $n, h(n), h(h(n)), \dots$, acaba necesariamente en 1.

Variaciones monótonas de mayor complejidad (II)

Dado un entero positivo n cualquiera, a partir de su expresión decimal generamos una cadena formada sólo por ceros. Tomamos las cadenas de longitud máxima formadas sólo por nueves, y cada tal cadena de longitud $m \geq 1$, la cambiamos por 3^m ochos. Cuando ya no quedan nueves, tomamos cada cadena de longitud máxima formada sólo por ochos, y cada tal cadena de m ochos la cambiamos por 3^m setes, y así sucesivamente, hasta sustituir n por una secuencia de (¡¡¡MUCHOS!!!) ceros

Se puede demostrar que la longitud de la cadena generada por $h(n)$ es menor que la longitud de la cadena generada por n

Nota: Este problema estaba en la lista corta de problemas preseleccionados para la IMO de 2009. De haberse propuesto en la prueba, hubiera sido probablemente el problema más difícil de esa IMO